

Оценка наблюдаемости вектора состояния космического аппарата по данным траекторных измерений

Estimation of the observability of the state vector of the spacecraft from the data of trajectory measurements

Цыбрин /Tsybrin V.

Владимир Григорьевич

(vlad.grigor@mail.ru)

кандидат технических наук, доцент,
почетный работник высшего профессионального
образования РФ.

ФГБВОУ ВО «Военно-космическая академия

имени А. Ф. Можайского»

(ВКА им. А. Ф. Можайского) МО РФ,

преподаватель кафедры

информационно-вычислительных систем и сетей.

г. Санкт-Петербург

Кудро /Kudro D.

Дмитрий Викторович

(kudro@list.ru)

кандидат технических наук.

ВКА им. А. Ф. Можайского МО РФ,

начальник отдела военного института

(научно-исследовательского).

г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: наблюдаемость – observability; вектор состояния – state vector; матрица системы нормальных уравнений – matrix of the system of normal equations; эллипсоид рассеяния – scattering ellipsoid.

Рассматриваются способы оценки наблюдаемости компонент вектора состояния космического аппарата (КА) применительно к задачам оценки эффективности состава траекторных измерений, привлекаемого для определения параметров его траектории.

Methods for assessing the observability of the components of the state vector of a spacecraft (SC) are considered in relation to the problems of assessing the effectiveness of the set of trajectory measurements used to determine the parameters of its trajectory.

Введение

На практике часто приходится иметь дело с составом траекторных измерений, осуществляемых с помощью средств наземных измерительных пунктов или с борта космического аппарата (КА), для которого могут быть не гарантированы условия полной наблюдаемости вектора состояния КА. Для такой совокупности измерений необходимо знать как сам факт нарушения наблюдаемости, так и составляющие вектора состояния, по которым наблюдаемость

отсутствует или резко ухудшается. Решению данного вопроса посвящена настоящая статья.

Понятие наблюдаемости, введенное впервые Р.Е. Калманом и другими авторами [2, 3, 4], является одним из основных в теории систем. В задачах определения параметров орбит КА под наблюдаемостью понимается способность решения этой задачи при выбранном составе траекторных измерений [1, 5, 6, 9]. В случае определения всех параметров орбиты КА наблюдаемость считается полной, при определении части параметров – неполной [6]. Цель данной статьи – рассмотреть сравнительно просто реализуемые на практике два способа оценки наблюдаемости компонент вектора состояния КА по данным траекторных измерений:

- на основе анализа матрицы частных производных от измеряемых функций по компонентам вектора состояния КА;

- на основе анализа диагональной формы матрицы наблюдаемости КА.

Задача решается в предположении, что при определении вектора состояния КА, в общем случае включающего шесть независимых параметров, производится отыскание приращений к априорно известным начальным параметрам траектории, при этом связь между приращениями вектора состояния КА δq и измеряемых функций δY с точностью до линейных относительно δq членов является линейной, а ошибки измерений имеют нормальное распределение с нулевыми первыми моментами. Для случая использо-

вания наиболее общего метода максимума правдоподобия, дающего асимптотически совместные эффективные оценки искомых параметров, соотношение для отыскания вектора δq имеет вид:

$$H^T K_{\delta Y}^{-1} H \delta q = H^T K_{\delta Y}^{-1} \delta Y, \quad (1)$$

где δq – m -мерный вектор отклонений компонент вектора состояния КА;

δY – l -мерный вектор отклонений текущих измерений;

H – матрица $l \times m$ частных производных от измеряемых функций по компонентам вектора состояния;

$K_{\delta Y}$ – корреляционная матрица ошибок измерений.

В соответствии с терминологией теории наблюдаемости [2, 5, 6] КА считается полностью наблюдаемым по данной совокупности измерений, если все компоненты вектора δq могут быть однозначно определены по этим измерениям. Как показывает анализ соотношения (1), для этого необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$A = H^T K_{\delta Y}^{-1} H$$

как матрица наблюдаемости была неособенной, а ее ранг равнялся размерности вектора состояния m . Соответственно, если ранг матрицы A меньше m , то имеет место нарушение наблюдаемости, при этом число ненаблюдаемых компонент (дефект наблюдаемости) определяется как

$$d = m - r, \quad (2)$$

где r – ранг матрицы A .

Если полагать, что корреляционная матрица ошибок измерений $K_{\delta Y}$ является невырожденной, то ранг матрицы наблюдаемости A фактически будет определяться рангом матрицы H .

Таким образом, при решении вопроса о принципиальной возможности полного или частичного определения параметров траектории КА по принятой выборке измерений, в общем случае достаточно тем или иным способом вычислить ранг матрицы A или H и при отличии его от размерности вектора состояния m определить причины, обуславливающие его изменение. Для решения этой задачи предлагается два способа, в основе которых лежат линейные невырожденные преобразования матриц H или A :

– исследование наблюдаемости компонент вектора состояния КА на основе анализа элементов матрицы частных производных от измеряемых функций по компонентам вектора состояния;

– исследование наблюдаемости компонент вектора состояния КА по диагональной форме матрицы наблюдаемости A .

Существенно, что оба способа позволяют построить систему характеристик наблюдаемости для любого состава измерений и допускают их физическую интерпретацию. При этом практическая реализация этих способов на ЭВМ не вызывает особых затруднений.

Исследование наблюдаемости компонент вектора состояния КА на основе анализа элементов матрицы частных производных от измеряемых функций по компонентам вектора состояния

Обозначим для удобства ее столбцы матрицы H через h_i . Тогда ее строки

$$h_i^T = \frac{\partial y_1}{\partial q_i}, \frac{\partial y_2}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial y_l}{\partial q_i},$$

где $i=1, 2, \dots, m$.

Для векторов h_i ($i=1, 2, \dots, m$) рассмотрим линейное евклидово m -мерное пространство с метрикой, определяемой положительно-определенной матрицей $K_{\delta Y}^{-1}$. Для введенного пространства внедиагональные элементы матрицы A будут представлять собой $K_{\delta Y}^{-1}$ – скалярные произведения векторов h_i и h_j ($i \neq j$)

$$a_{ij} = h_i^T \cdot K_{\delta Y}^{-1} \cdot h_j = (h_i \cdot h_j)_{K_{\delta Y}^{-1}}. \quad (3)$$

Соответственно, диагональные элементы a – это квадрат длины векторов h_i , так как роль длины i -го вектора здесь играет $K_{\delta Y}^{-1}$ – длина $\sqrt{h_i^T K_{\delta Y}^{-1} h_i}$.

Такой подход дает возможность объяснить нарушение наблюдаемости вектора состояния КА по полученным измерениям двумя причинами:

Первая. Длина некоторых векторов h_i ($i=1, 2, \dots, m$) стремится к нулю, что указывает на то, что вектор δq не вызывает отклонений соответствующей измеряемой функции относительно ее опорных значений в точках измерений.

Вторая. Между некоторыми векторами $h_1, h_2, \dots, h_m$ имеются весьма малые углы, что означает близость этих векторов к линейной зависимости.

Данная интерпретация, обладая достаточной общностью, существенно упрощает процесс определения ненаблюдаемых (неопределяемых) компонент вектора состояния КА. Действительно, сравнительная оценка длины векторов по величине диагональных элементов матрицы A не вызывает затруднений.

Для оценки значения углов между векторами $h_1, h_2, \dots, h_m$ воспользуемся соотношением для косинуса угла между парой h_i векторов в m -мерном пространстве:

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{(h_i, h_j)_{K_{\delta Y}^{-1}}}{\|h_i\|_{K_{\delta Y}^{-1}} \cdot \|h_j\|_{K_{\delta Y}^{-1}}}, \quad (4)$$

где $\|h_i\|_{K_{\delta y}^{-1}} - K_{\delta y}^{-1}$ – норма вектора h .

С учетом (3) соотношение (4) может быть представлено следующим образом:

$$\cos \varphi_{ij} = a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii} \cdot a_{jj}}}. \quad (5)$$

Преобразуя в соответствии с выражением (5) элементы матрицы A , получим матрицу:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \cos \varphi_{12} & \cos \varphi_{13} & \dots & \cos \varphi_{1m} \\ \cos \varphi_{21} & 1 & \cos \varphi_{23} & \dots & \cos \varphi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos \varphi_{m1} & \cos \varphi_{m2} & \cos \varphi_{m3} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

элементы которой характеризуют значение углов между векторами $h_1, h_2, \dots, h_m$ или условие наблюдаемости компонент вектора состояния КА.

Действительно, пусть, например, хотя бы для одного из внедиагональных элементов матрицы A' удовлетворяется условие

$$|a'_{ij}| = |\cos \varphi_{ij}| = 1, \quad (i \neq j).$$

Тогда $\varphi_{ij} = k\pi$ ($k=0,1$) и означает, что векторы h_i и h_j коллинеарны, т. е. $h_i = \alpha h_j$, где α – коэффициент пропорциональности. Это соответствует линейной зависимости между частными производными $\frac{\partial y}{\partial q_i}$ и $\frac{\partial y}{\partial q_j}$ и является причиной потери наблюдаемости по одной из компонент вектора состояния. При $|a'_{ij}| = |\cos \varphi_{ij}| = 0, \quad (i \neq j)$ векторы h_i и $h_j K_{\delta y}^{-1}$ – ортогональны, т. е. частные производные $\frac{\partial y}{\partial q_i}$ и $\frac{\partial y}{\partial q_j}$ независимы в пространстве, метрика которого определяется матрицей $K_{\delta y}^{-1}$ и указывает на наблюдаемость всех компонент вектора состояния КА по данной совокупности измерений.

Оценка наблюдаемости компонент вектора состояния КА по диагональной форме матрицы наблюдаемости A

Известно, что для всякой симметрической матрицы A найдется ортогональная матрица T такая, что

$$T^T A T = \tilde{A} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \Lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \Lambda_m \end{pmatrix} \quad (7)$$

есть диагональная матрица, где $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m$ – ее собственные (характеристические) числа. Для диаго-

нальной матрицы $\tilde{A}$ ранг не может быть больше числа диагональных элементов, отличных от нуля, т. е. при

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m \neq 0 \quad (8)$$

дефект матрицы A равен нулю и, соответственно, $r_A = m$, что указывает на наблюдаемость всех компонент вектора состояния. Если матрица наблюдаемости имеет n собственных чисел, равных нулю, и n меньше m , то по используемой совокупности измерений наблюдаемы лишь компоненты вектора состояния для подпространства траекторий, размерность которого $n' = m - n$. Учитывая, что матрице A^{-1} соответствует m -мерный эллипсоид рассеивания, сформулированные выше условия наблюдаемости вектора состояния КА имеют простой физический смысл: невозможность определения тех или иных параметров траектории эквивалентно уменьшению размерности этого эллипсоида.

Иными словами, при потере наблюдаемости по одной или нескольким компонентам вектора состояния КА происходит как бы «сплющивание» эллипсоида рассеивания. Следует отметить две важные особенности представления матрицы наблюдаемости A в собственном базисе:

- отсутствие в матрице A характеристических чисел, равных нулю, означает наблюдаемость всех компонент вектора состояния КА по данной совокупности измерений;

- равенство нулю любого характеристического числа матрицы A указывает на потерю наблюдаемости соответствующей компоненты вектора состояния КА.

Рассмотрим оценку наблюдаемости компонент вектора состояния КА при представлении матрицы в собственном базисе для общего случая использования для оценки параметров траектории КА группы измерений.

Пусть

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_e, \quad (9)$$

где $A_1, A_2, \dots, A_e$ – матрицы наблюдаемости, соответствующие отдельным группам измерений. С учетом (1) выражение для матрицы A будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} H_1^T & H_2^T & \dots & H_e^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1^{-1} & & & \\ & K_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_e^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_e \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где H_i – прямоугольная матрица частных производных для i -й группы измерений, K_i – корреляционная

матрица ошибок i -й группы измерений, $i=1,2,\dots,I$ – номер группы измерений.

Тогда при условии, что между группами измерений, которым соответствуют матрицы $A_1, A_2, \dots, A_e$, корреляция отсутствует, равенство нулю любого характеристического числа матрицы A равносильно равенству нулю соответствующих характеристических чисел в матрицах слагаемых соответствующих групп измерений. Это будет иметь место только в случае потери наблюдаемости из-за отсутствия отклика каждой группы измерений к одной и той же компоненте вектора состояния КА.

Доказательство. Допустим, что для $A = A_1 + A_2 + \dots + A_e$ известна невырожденная матрица ортогонального вращения T . Тогда можно записать

$$T^T A T = T^T A_1 T + T^T A_2 T + \dots + T^T A_e T. \quad (11)$$

Пусть одно из характеристических чисел Λ_i матрицы $T^T A T$ равно нулю. Так как $\Lambda_i = \tilde{a}_{ii}$ и представляет собой сумму I слагаемых, то это может быть лишь в том случае, если $\tilde{a}_{i1} = \tilde{a}_{i2} = \dots = \tilde{a}_{ie} = 0$, поскольку матрица ортогонального вращения T не является вырожденной по условию.

Анализ (11) также показывает, что потеря наблюдаемости по той или иной группе измерений в отдельности не приводит к потере наблюдаемости при обработке полной выборки измерений.

Таким образом, из рассмотренного следует, что на основе анализа матрицы наблюдаемости A в собственном базисе может быть полностью исследована проблема наблюдаемости вектора состояния КА.

В заключении отметим, что при исследовании наблюдаемости в работе использовался для ортогонализации матриц итерационный метод Якоби [4], сущность которого сводится к отысканию матрицы ортогонального вращения T как предела последовательности матриц простых поворотов. Метод характеризуется квадратичной сходимостью и достаточно просто реализуется на ЭВМ.

Заключение

В статье рассматриваются алгоритмы и методика оценки наблюдаемости компонент вектора состояния космического аппарата (КА) при обработке траекторных измерений, привлекаемых для определения статистическими методами параметров его орбиты. Такие измерения могут осуществляться с наземных измерительных пунктов или с борта КА.

Представленные алгоритмы оценки наблюдаемости компонент вектора состояния КА могут использоваться при выяснении возможности полного или частичного определения параметров орбиты КА в различных условиях полета по заданной выборке траекторных измерений, а также при выборе эффек-

тивного состава траекторных измерений в процессе баллистического проектирования полета КА.

Литература

1. Автономная навигация космических аппаратов / Г.П. Аншаков, А.Д. Голяков, В.Ф. Петрищев, В.А. Фурсов ; под общей редакцией А.Н. Кирилина. – Самара : Государственный научно-производственный ракетно-космический центр «ЦСКБ – Прогресс», 2011. – 486 с.
2. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб ; пер. с англ. ; под ред. Я.З. Цыпкина. – Москва : Едиториал УРСС, 2004. – 400 с.
3. Калман, Р. Е. Об общей теории систем управления / Р.Е. Калман // Труды 1-го международного конгресса ИФАК. – 1961. – Т. 2. – С. 521–546.
4. Ли, Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление / Р. Ли. – Москва : Наука, 1966. – 176 с.
5. Воронов, А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость / А.А. Воронов. – Москва : Наука, 1979. – 248 с.
6. Резников, Б. А. О параметрической наблюдаемости космических аппаратов / Б.А. Резников. – Космические исследования. – 1968. – Т. 6, Вып. 3. – С. 312–315.
7. Фадеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фадеев, В.Н. Фадеева. – Москва : Лань, 1999. – 656 с.
8. Голяков, А. Д. Системы навигации летательных аппаратов / А.Д. Голяков, В.М. Анащенко, И.В. Фоминов. – Санкт-Петербург : ВКА им. А.Ф. Можайского, 2018. – 273 с.
9. Брандин, В. Н. Определение траекторий космических аппаратов / В.Н. Брандин, Г.Н. Разоренов. – Москва : Машиностроение, 1978. – 216 с.
10. Космическая геодезия / В.И. Баранов, Е.Г. Бойко, Н.Н. Краснорылов [и др.]. – Москва : Недра, 1986. – 407 с.
11. Шефер, В. А. Новый метод определения орбиты по двум векторам положений, основанный на решении уравнений Гаусса / В.А. Шефер // Астрономический вестник. – 2010. – Т. 44, № 3. – С. 273–288.
12. Соколов, Н. Л. Аналитический метод расчета траекторий движения космического аппарата при проведении ракетодинамических маневров и коррекций / Н.Л. Соколов // Информация и Космос. – 2016. – № 2. – С. 127–133.
13. Баранов, А. А. Оценка маневров, выполненных активным космическим объектом / А.А. Баранов, М.О. Каратунов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение. – 2015 – № 5 (104). – С. 25–37.
14. Данилова, Т. В. Система автономной навигации для малых космических аппаратов в составе кластера / Т.В. Данилова, М.А. Архипова, М.А. Маслова // Труды Института прикладной астрономии РАН. – 2021. – № 58. – С. 24–29.
15. Навигация космических аппаратов при исследовании дальнего космоса / В.М. Ватутин, С.А. Ежов, М.В. Захваткин [и др.] ; под ред. Е.П. Молотова, А.Г. Тучина. – Москва : Радиотехника, 2016. – 232 с.
16. Тюлин, А. Е. Навигационно-баллистическое обеспечение полёта ракетно-космических средств. Книга 1.

Методы, модели и алгоритмы / А.Е. Тюлин, В.В. Бетанов, А.А. Кобзарь. – Москва : Радиотехника, 2018. – 480 с.

17. Кузнецов, В. И. Основные результаты применения автоматизированной системы научных исследований методов и алгоритмов автономной навигации и ориентации космических аппаратов / В.И. Кузнецов, Т.В. Данилова, М.А. Архипова // Научные технологии в космических исследованиях Земли. – 2018. – Т. 10, № 1. – С. 4–14.

18. Данилова, Т. В. Математическая модель многофункционального звездного датчика / Т.В. Данилова, М.А. Архипова, М.А. Маслова // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2021. – Т. 64, № 10. – С. 839–851.

19. Астрономическая система автономной навигации и ориентации искусственных спутников Луны / В.И. Кузнецов, Т.В. Данилова, Д.М. Косулин, М.А. Архипова // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2018. – Т. 61, № 10. – С. 844–854.