

Построение программных траекторий движения на базе решения задачи “Машина Дубинса”

Construction of software trajectories of motion on the basis of the solution of the problem "Dubins Machine"

Вагизов / Vagizov M.

Марсель Равильевич

(bars-tatarin@yandex.ru)

кандидат технических наук.

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет имени С. М. Кирова» (СПбГЛТУ им. С. М. Кирова),

заведующий кафедрой информационных систем

и технологий, институт леса и природопользования.

г. Санкт-Петербург

Хабаров / Khabarov S.

Сергей Петрович

(serg.habarov@mail.ru)

кандидат технических наук, доцент.

СПбГЛТУ им. С. М. Кирова,

доцент кафедры информационных систем и

технологий, институт леса и природопользования.

г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: машина Дубинса – Dubins' car. unmanned aerial vehicles (UAVs); беспилотные летательные аппараты (БПЛА); траектория движения – motion trajectory; алгоритмы – algorithms; оптимальное управление – optimal control.

Рассмотрен подход к формированию программных траекторий движения подвижных объектов как решение оптимальной по быстродействию задачи для машины Дубинса. Предложено вместо прямого решения принципа максимума Понтрягина и построения трехмерной линии переключения воспользоваться простым перебором возможных стратегий управления с целью определения среди них оптимальной по быстродействию. Показано, что в пользу этого говорит ограниченное для машин Дубинса количество возможных стратегий управления, а также простота аналитических расчетов для каждой из них, что позволяет выполнять эти расчеты практически в реальном времени.

An approach to the formation of programmed trajectories of moving objects is considered as a solution to the optimal speed problem for the Dubins machine. Instead of directly solving the Pontryagin maximum principle and constructing a three-dimensional switching line, it is proposed to use a simple enumeration of possible control strategies in order to determine among them the optimal one in terms of speed. It is shown that this is supported by the limited number of possible control strategies for Dubins machines, as well as the simplicity of analytical calculations for each of them, which makes it possible to perform these calculations in almost real time.

Введение

Для мониторинга линейных объектов (газопроводов, линий электропередач, дорог) или исследования прибрежных морских акваторий в насто-

ящее время используют беспилотные летательные аппараты (БПЛА), исследовательские суда и подводные роботы. Объединяет их то, что все они, с одной стороны, должны осуществлять свое движение по строго определенным программным траекториям, а с другой – обладают ограниченной управляемостью по угловым скоростям. Программные траектории определяют генеральное направление движения подвижных объектов, в окрестности которых должны стабилизироваться все кинематические параметры их движения. При этом программные траектории, как правило, задаются в виде упорядоченного набора путевых точек $\{P_i, i=1, \dots, n\}$, который интерпретируется, как совокупность прямолинейных участков траектории, соединяющих между собой путевые точки P_i и P_{i+1} . В этих условиях практически важной является задача гладкого сопряжения всех участков опорной траектории между собой.

При решении этой задачи на сфере в [1, 2] было предложено использовать гладкую кривую сопряжения в виде заданного радиуса поворота. Однако этот подход ограничен в своем применении, особенно для сложных программных траекторий и специфических требованиях к прохождению каждого из ее участков. Более полезным может оказаться подход к формированию кривых сопряжения как кратчайших траекторий движения объекта из некоторой исходной точки в заданную конечную точку, которые лежат на сопрягаемых участках программной траектории.

Результаты, полученные Л. Дубинсом [3], оказались очень полезными для исследования движения объектов с ограничением на радиус поворота и с постоянной по величине линейной скоростью. Такие объекты стали называть “машина Дубинса”, хотя подобными задачами еще в 1889 г. занимался А. А. Марков [4]. В рамках решения этой задачи с исполь-

зованием принципа максимума Л. С. Понтрягина было установлено, что наискорейший переход из точки в точку с заданными начальным и конечным направлениями линейной скорости осуществляется при помощи кусочно-постоянного управления не более чем с двумя переключениями.

Модель Дубинса нашла применение для решения широкого класса задач таких, например, как определение множества достижимости при симметричном и несимметричном ограничениях на управление [5–7], поиске оптимального управления для обобщенной машины Дубинса [8] и применительно к управлению БПЛА [9, 10].

В данной статье предлагается использовать аналогичный подход как для формирования оптимальных по быстродействию режимов маневрирования подвижных объектов, так и для поиска гладких кривых сопряжения участков программной траектории. При этом будет использована простейшая модель движения объекта в горизонтальной плоскости («машина Дубинса»). Модель динамики движения объекта с постоянной по величине линейной скоростью и ограничениями на угловую скорость. Она описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка, где две фазовые переменные характеризуют геометрическое положение объекта на плоскости, а третья – угол направления вектора скорости.

При этом предлагается аналитическое исследование и решение прямой и сопряженной систем, вытекающих из принципа максимума Понтрягина и построения трехмерной линии переключения заменить простым перебором возможных стратегий управления с целью определения среди них оптимальной по быстродействию. В пользу этого говорит ограниченное для машин Дубинса количество возможных стратегий управления, а также простота аналитических расчетов для каждой из них, что позволяет выпол-

нять эти расчеты практически в реальном времени.

Постановка задачи

Исследуется множество достижимости для нелинейной управляемой системы третьего порядка, называемой часто «машина Дубинса». Объект перемещается на плоскости с постоянной по величине скоростью и имеет ограничения на угловые скорости поворота вправо и влево,

Требуется найти кратчайшую траекторию движения объекта из некоторой исходной точки $A(x_0, y_0, \varphi_0)$ в требуемую конечную точку $B(x_k, y_k, \varphi_k)$. В этом случае движение управляемого объекта на плоскости XOY описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} x'(t) &= V \cdot \sin \varphi(t), \\ \varphi'(t) &= u(t), \\ u(t) &\in [U_{\min}, U_{\max}], \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0 \\ x(t_k) &= x_k, \quad y(t_k) = y_k, \quad \varphi(t_k) = \varphi_k \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(t), y(t)$ – координаты объекта в неподвижной системе координат, $\varphi(t)$ – угол курса (угол между направлением вектора скорости и направлением на север), V – постоянная по величине скорость движения объекта, $u(t)$ – скалярный сигнал управления.

Известно [2], что управления, которые приводят систему (1) на границу множества достижимости в момент t_k удовлетворяют принципу максимума Понтрягина, а соответствующие траектории на плоскости XOY состоит из конечного числа дуг окружностей при $u(t) = \pm U$ и прямолинейных участков траекторий при $u(t) = 0$. При этом Дубинс [11, глава 15] показал, что существует всего три примитива движения, из которых

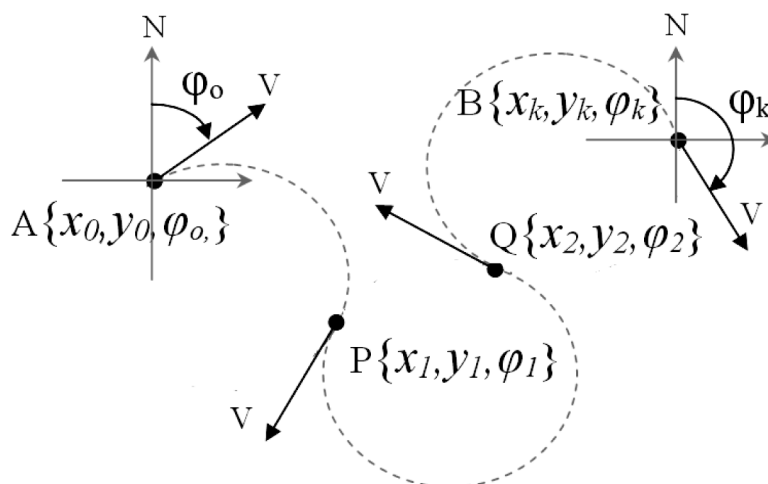


Рис. 1. Исходная, конечная и промежуточные точки кривых Дубинса

могут быть построены все оптимальные кривые для “автомобиля Дубинса”, которые он обозначил, как: S (при $u(t) = 0$); L (при $u(t) = -U$) и R (при $u(t) = U$).

С использованием этих символов каждый возможный вид кратчайшего пути может быть обозначен как последовательность из трех символов, которая соответствует порядку, в котором применяются примитивы. Нет необходимости иметь два последовательных примитива одного и того же типа, потому что их можно объединить в один. При таком наблюдении возможны десять слов длины три, но Дубинс показал, что оптимальными, возможно, являются только следующие шесть слов:

$$\{RLR, LRL, LSL, LSR, RSL, RSR\} \quad (2)$$

Кратчайший путь между любыми двумя конфигурациями всегда можно охарактеризовать одним из этих слов. Они называются кривыми Дубинса. Из (2) следует, что переход из любой произвольной точки A в любую другую точку B может быть осуществлен не более чем тремя переключения управляющего сигнала в моменты времени t_0, t_1 и t_2 .

При этом на каждом из интервалов движения $\Delta t_0 = t_1 - t_0$, $\Delta t_1 = t_2 - t_1$ и $\Delta t_2 = t_3 - t_2$ управляющий сигнал $u(t)$ является кусочно-постоянным и принимает значения $u(\Delta t_0) = u_0$, $u(\Delta t_1) = u_1$, $u(\Delta t_2) = u_2$ в соответствии с одной из возможных стратегий (2). Таким образом, исходная задача может быть сведена к задаче поиска параметров двух промежуточных точек P и Q (рис. 1). Это позволит определить не только вид отдельных фрагментов траектории движения, но и время, затрачиваемое на прохождение каждого из фрагментов.

Методика исследования

Для решения поставленной задачи воспользуемся аналитическим решением системы (1) для поиска параметров точки P на основе данных об исходной точке A . Это решение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt = \varphi_0 + u_0 (t_1 - t_0) \\ x_1 &= x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} V \sin \varphi(t) dt = x_0 + \frac{V}{u_0} \cos \varphi_0 - \frac{V}{u_0} \cos \varphi_1 \\ y_1 &= y(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} V \cos \varphi(t) dt = y_0 - \frac{V}{u_0} \sin \varphi_0 + \frac{V}{u_0} \sin \varphi_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Принимая во внимание, что u_0 представляет собой не что иное, как угловую скорость перемещения объекта, выражение V/u_0 можно трактовать, как радиус циркуляции (R_0) объекта на данном фрагменте траектории. Тогда, введя новые обозначения, а именно

$$\begin{aligned} a &= x_0 + R_0 \cos \varphi_0, \\ b &= y_0 - R_0 \sin \varphi_0, \end{aligned} \quad (4)$$

второе и третье уравнения из (3) можно переписать в виде (5)

$$\begin{aligned} x_1 &= a - R_0 \cos \varphi_1, \\ y_1 &= b + R_0 \sin \varphi_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Что касается первого уравнения системы (3), то оно в дальнейшем после определения значения φ_1 позволит нам вычислить интервал времени Δt_1 , затраченный объектом на движение по первому фрагменту траектории.

Если теперь аналогично выполнить аналитическое решение системы (1) на интервале Δt_2 , то можно сделать попытку определить параметры точки Q на основе данных о заданной конечной точке B . При этом координаты точки B аналогично (4) и (5) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + R_2 \cos \varphi_2 - R_2 \cos \varphi_3, \\ y_3 &= y_2 - R_2 \sin \varphi_2 + R_2 \sin \varphi_3. \end{aligned}$$

Откуда можно получить значение координат точки Q , которые при вводе новых обозначений вида (6), аналогичных выражению (4)

$$\begin{aligned} c &= x_3 + R_2 \cos \varphi_3, \\ d &= y_3 - R_2 \sin \varphi_3 \end{aligned} \quad (6)$$

будут иметь вид (7), который аналогичен выражениям (5)

$$\begin{aligned} x_2 &= c - R_2 \cos \varphi_2, \\ y_2 &= d + R_2 \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Стратегии управления RLR и LRL . Общим для этих стратегий является то, что у них на интервалах Δt_0 и Δt_2 сигнал управления имеет один и тот же знак, а на интервале Δt_1 он противоположного знака. То есть, $R_2 = R_0$, а $R_1 = -R_0$. При этом различие этих двух стратегий в том, что при выборе первой стратегии $u_0 = U$, а при второй $u_0 = -U$. Учитывая эти замечания решение системы (1) на интервале Δt_1 будет иметь вид:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + R_1 \cos \varphi_1 - R_1 \cos \varphi_2 = x_1 - R_0 \cos \varphi_1 + R_0 \cos \varphi_2 \\ y_2 &= y_1 - R_1 \sin \varphi_1 + R_2 \sin \varphi_2 = y_1 + R_0 \sin \varphi_1 - R_0 \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

а с учетом (5) они могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}x_2 &= a - 2R_0 \cos \varphi_1 + R_0 \cos \varphi_2, \\y_2 &= b + 2R_0 \sin \varphi_1 - R_0 \sin \varphi_2.\end{aligned}\quad (8)$$

Таким образом, решая систему уравнений (1) в прямом времени от точки A к точке Q , и в обратном времени от точки B к точке P , мы получили две системы уравнений (7) и (8) относительно координат x_2 и y_2 . Приравнявая их между собой, мы получаем систему двух нелинейных уравнений относительно двух неизвестных φ_1 и φ_2 вида:

$$\begin{aligned}\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 &= (c-a)/2R_0, \\ \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 &= (b-d)/2R_0.\end{aligned}\quad (9)$$

Наличие решения у данной системы гарантирует возможность построения оптимальной траектории движения объекта из точки A к точке B . Поэтому первым этапом является проверка реализуемости стратегий RLR и LRL при заданных исходных и требуемых конечных данных. Для этого оба уравнения системы (9) возведем в квадрат, сложим между собой и получим

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 - ((c-a)^2 + (b-d)^2)/8R_0^2 \quad (10)$$

Принимая во внимание, что левая часть уравнения всегда по абсолютной величине должна быть меньше 1, то и для наличия решения системы (9) правая часть уравнения (10) должна также быть по абсолютной величине меньше единицы. Это условие выполняется, в случае если

$$(c-a)^2 + (b-d)^2 \leq 16R_0^2 \quad (11)$$

и тогда систему (9) можно записать в виде:

$$2 \sin \alpha \sin \beta = (a-c)/2R_0, \quad (12)$$

$$2 \sin \beta \cos \alpha = (b-d)/R_0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha &= \varphi_2 + \varphi_1/2, \\ \beta &= \varphi_2 - \varphi_1/2.\end{aligned}$$

Последние два уравнения дают путь для вычисления значений φ_1 и φ_2 , то есть для фактического решения поставленной задачи для стратегий RLR и LRL :

$$\varphi_1 = \alpha - \beta, \quad (14)$$

$$\varphi_2 = \alpha + \beta. \quad (15)$$

Но для этого надо сначала получить значения α и β . С этой целью, получив из (13) выражение для β

подставив его в (12), можно получить формулу для вычисления значения α :

$$\alpha = \text{atan2}(a-c, b-d)$$

А после определения значения α появляется возможность из уравнения (13) получить формулу для вычисления значения β :

$$\beta = \arcsin((b-d)/((4R_0 \cos \alpha)))$$

На основе полученных значений α и β в соответствии с (14) и (15) могут быть определены значения φ_1 и φ_2 , которые, в свою очередь, позволяют на основании выражений (5) и (8) найти координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) точек P и Q , то есть точек сопряжения кривых Дубинса для стратегий RLR и LRL .

Остается только оценить время, затрачиваемое для реализации каждой из этих стратегий, которое можно получить путем суммирования отдельных временных интервалов:

$$T = \Delta t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2$$

$$\Delta t_i = (\varphi_{i+1} - \varphi_i)/\omega_i, i = 0, 1, 2 \quad (16)$$

Однако, использование для вычисления временных интервалов выражения (16) требует, чтобы:

- все заданные и найденные значения курсовых углов φ_i находились бы в диапазоне $[0, 2\pi]$, в противном случае нужен перерасчет;
- используемое в (16) значение φ'_i должно быть получено из исходного значения φ_i с учетом совпадение величины изменения угла на данном интервале с сигналом управления (угловой скоростью) этого этапа:

$$\varphi'_i = \begin{cases} \varphi_i - 2\pi, & \text{если } \varphi_i > \varphi_{i+1} \text{ и } \text{sign}(\omega_i) > 0 \\ \varphi_i + 2\pi, & \text{если } \varphi_i < \varphi_{i+1} \text{ и } \text{sign}(\omega_i) < 0 \\ \varphi_i, & \text{во всех иных случаях} \end{cases}$$

Изложенная выше методика построения кривых Дубинса для стратегий RLR и LRL базировалась на поиске общего решения системы нелинейных уравнений (12,13). Однако в процессе реализации данных стратегий возможны и особые случаи, такие, например, как достижимость конечной точки с использованием только одного или двух фрагментов траекторий, а также ряд других ситуаций.

Особые случаи стратегий RLR и LRL

Следует отметить, что, реализуя эти стратегии, надо иметь в виду, что решением системы (12,13) является не только угол α , но и значение $\alpha = \alpha + \pi$. Таким образом, имеет смысл разделить каждую из стратегий на две $RLR-1$, $RLR-2$ и $LRL-1$, $LRL-2$, выполнив все расчеты, соответственно, со значениями

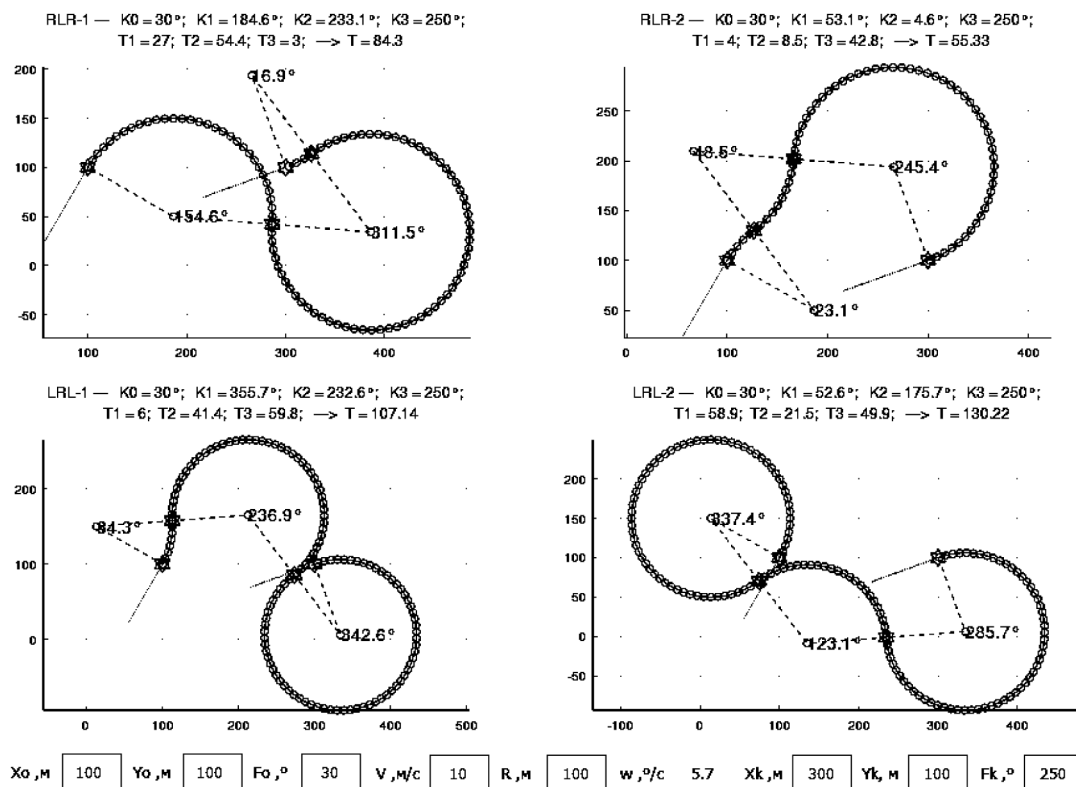


Рис. 2. Пример реализации двух вариантов стратегий RLR и LRL

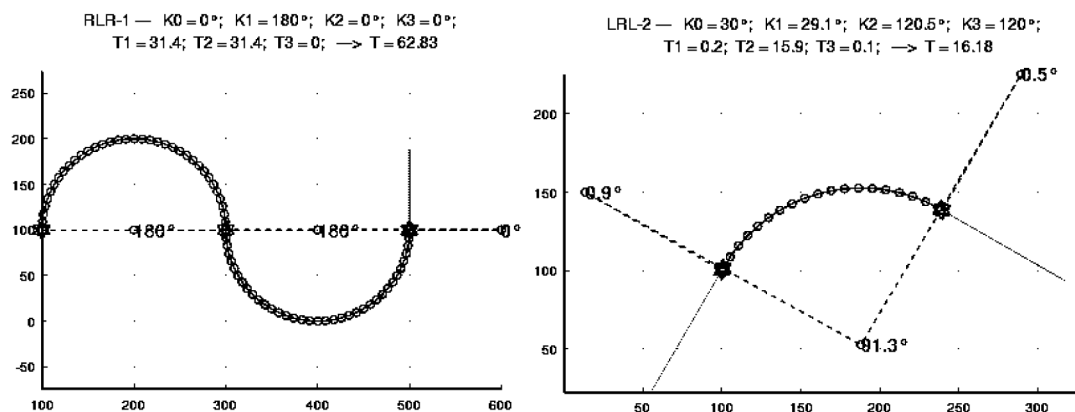


Рис. 3. Формирование в стратегиях RLR и LRL вырожденных кривых Дубинса

в первом случае, со значением $\alpha + \pi$ во втором. Такой подход позволяет существенно упростить аналитический анализ системы нелинейных уравнений (12, 13), а анализ времени пребывания на конкретной траектории дает возможность оценить качество конкретной стратегии по сравнению с другими (рис. 2).

На рис. 2 приведен пример расчета и построения кривых Дубинса, который показывает, что реализация второго сценария стратегии *RLR* при конкретном наборе исходных данных позволил получить более предпочтительный с точки зрения затрат времени вариант реализации траектории.

Еще один особый режим решения нелинейной системы (12, 13) возникает, когда выражения $b-d$ принимает близкие к нулю значения. В этом случае может быть использован следующий подход для вычисления курсовых углов:

$$\begin{aligned}\varphi_{1-1} &= \pi - \arccos((a-c)/4R_0) \\ \varphi_{2-1} &= \pi - \varphi_{1-1} \\ \varphi_{1-2} &= 2\pi - \arccos((a-c)/4R_0) \\ \varphi_{2-2} &= \pi - \varphi_{1-2}\end{aligned}$$

Следует отметить, что предложенный алгоритм обладает способностью в расчете не только стандартных, но вырожденных кривых Дубинса, то есть таких, в состав которых входит менее трех сегментов, и которые формируются меньшим количеством точек переключения управления.

В частности на рис. 3 приведены примеры, где при соответствующем наборе исходных данных алгоритм позволил сформировать оптимальные траектории всего с одним и двумя переключения.

Стратегии *LSL*, *LSR*, *RSL*, *RSR*

Подход к расчету и построению кривых Дубинса для этих стратегий практически аналогичен тому, что был описан выше. Этим стратегиям соответствует 4 варианта управляющих воздействий. И соответствующие им радиусы циркуляции $R_i = V/u_i, i = 0, 1, 2$.

Отличие этих стратегий в том, что на втором временном интервале радиус циркуляции $R_1 = \infty$, то есть на этом временном интервале выполняется прямолинейное движение с курсовым углом φ_1 .

Особенность данного курсового угла в том, что начав свое движение по прямолинейному участку из точки $P\{x_1, y_1, \varphi_1\}$ этот участок траектории должен попасть в точку Q с координатами $\{x_2, y_2, \varphi_2\}$. Причем в конечную точку этот фрагмент траектории придет с тем же курсовым углом, с которым началось его движение.

То есть при реализации стратегий *LSL*, *LSR*, *RSL*, *RSR* курсовой угол φ_2 в точке Q должен быть всегда равен курсовому углу φ_1 в точке P . Именно это утверждение и положено в основу предлагаемого алгоритма, основной целью которого является определение значения угла φ_1 , что позволит однозначно определить значения всех координаты точек P и Q .

Оставаясь в заявленной в самом начале статьи парадигме движения к точке Q двумя путями, а именно в прямом времени из точки A и в обратном времени из точки B , следует, что независимо от стратегии управления координаты точки P должны удовлетворять уравнениям (5), а координаты точки Q уравнениям (7):

$$\begin{aligned}x_1 &= a - R_0 \cos \varphi_1, \text{ где } a = x_0 + R_0 \cos \varphi_0 \\ y_1 &= b + R_0 \sin \varphi_1, \text{ где } b = y_0 - R_0 \sin \varphi_0 \\ x_2 &= c - R_2 \cos \varphi_2, \text{ где } c = x_3 + R_2 \cos \varphi_3 \\ y_2 &= d + R_2 \sin \varphi_2, \text{ где } d = y_3 - R_2 \sin \varphi_3\end{aligned}$$

Принимая во внимание тот факт, что в прямом времени прямолинейное движение от точки P к точке Q осуществляется по траектории длины L (рис. 4) координаты точки Q должны соответствовать следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}x_2' &= x_1 + L \sin \varphi_1 = a - R_0 \cos \varphi_1 + L \sin \varphi_1 \\ y_2' &= y_1 + L \cos \varphi_1 = b + R_0 \sin \varphi_1 + L \cos \varphi_1\end{aligned}$$

Стратегия	$u_0(t_1 - t_0)$	$u_1(t_2 - t_1)$	$u_2(t_k - t_2)$
<i>RSR</i>	U	0	U
<i>RSL</i>	U	0	$-U$
<i>LSL</i>	$-U$	0	$-U$
<i>LSR</i>	$-U$	0	U

В то время как в обратном времени при движении от точки B к точке Q и при условии, что $\varphi_2 = \varphi_1$ координаты точки Q должны соответствовать следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}x_2'' &= c - R_2 \cos \varphi_1 \\ y_2'' &= d + R_2 \sin \varphi_1\end{aligned}$$

Исходя из того, что x_2', y_2' и x_2'', y_2'' это координаты одной и той же точки, то и выражения для этих координат должны быть равны между собой:

$$\begin{aligned}a - R_0 \cos \varphi_1 + L \sin \varphi_1 &= c - R_2 \cos \varphi_1 \\ b + R_0 \sin \varphi_1 + L \cos \varphi_1 &= d + R_2 \sin \varphi_1\end{aligned}$$

После выполнения простейших преобразования можно получить систему из двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными L и φ_1 .

$$(c-a) - (R_2 - R_0) \cos \varphi_1 = L \sin \varphi_1, \quad (17)$$

$$(d-b) + (R_2 - R_0) \sin \varphi_1 = L \cos \varphi_1, \quad (18)$$

решение которой позволит однозначно решить задачу формирования кривых Дубинса для стратегий управления LSL, LSR, RSL, RSR . Для аналитического решения данной системы выполним ряд преобразований. В частности, если из (17) выразить L , то после подстановки этого значения в (18) получим уравнение для определения курсового угла φ_1 :

$$(c-a) \cos \varphi_1 - (d-b) \sin \varphi_1 = (R_2 - R_0) \quad (19)$$

Для получения аналитического выражения, определяющего значение L , можно каждое из выражений (17) и (18) возвести в квадрат, и просуммировать, в результате будет получено:

$$z - 2(R_2 - R_0) * ((c-a) \cos \varphi_1 - (d-b) \sin \varphi_1) = L^2, \quad (20)$$

$$z = (c-a)^2 + (d-b)^2 + (R_2 - R_0)^2$$

Если теперь обратить внимание на вторые скобки выражения (20), то можно заметить, что выражение в них точно совпадает с левой частью уравнения (19), что позволяет выражение (20) переписать в виде

$$(c-a)^2 + (d-b)^2 + (R_2 - R_0)^2 = L^2,$$

Принимая во внимание, что длина прямолинейного участка траектории L это неотрицательная величина, то можно сделать вывод, что системы (17, 18) будет иметь решение только в том случае, когда выполняется условие

$$(c-a)^2 + (d-b)^2 - (R_2 - R_0)^2 \geq 0 \quad (21)$$

и при его выполнении длина прямолинейного участка траектории от точки P до точки Q будет определяться выражением вида

$$L = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2 - (R_2 - R_0)^2} \quad (22)$$

Определив L , как одну из неизвестных переменных системы (17,18), вторую неизвестную φ_1 , можно найти из уравнения (19), решение которого при вводе переменных $p = c-a, q = d-b, r = R_2 - R_0$ может быть представлено в виде:

$$\varphi = \begin{cases} 2 * \text{atan2}(p, q), & \text{если } q_0 \neq 0 \text{ и } (p^2 + q^2) \neq 0 \\ \varphi_0 + (\varphi_k - \varphi_0), & \text{если } |p| < \varepsilon |R_0| \text{ и } |q| < \varepsilon |R_0| \\ 2 * \text{atan2}(L - q, p + r), & \text{в иных случаях} \end{cases} \quad (23)$$

Функция $\text{atan2}(y, x)$ возвращает арктангенс величины y/x . Она использует знаки своих аргументов для вычис-

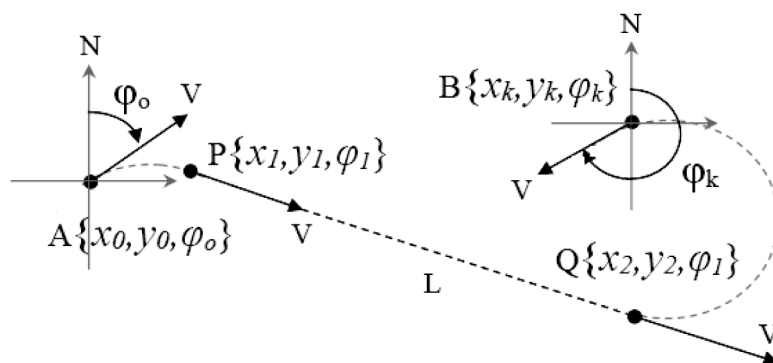


Рис. 4. Формирование кривых Дубинса при наличии прямолинейных участков

ления квадранта возвращаемой величины, измеряемой в радианах в пределах от $-\pi$ до π . При этом значение $\text{atan2}(y, x)$ неопределенно при значении $y = x = 0$.

Применительно к решаемой задаче такое возникает при малых значениях L , что соответствует варианту вырожденных кривых Дубинса. Поэтому в (23) добавлено второе выражение для Φ_1 , описывающее вырожденную кривую Дубинса всего с одним переключением управляющего сигнала. Значения выбираются исходя из требуемой точности, но для большинства прикладных задач ее можно принять $\approx 0.5\% - 1\%$ от радиуса циркуляции.

После получения для каждой из рассматриваемых стратегий LSL, LSR, RSL, RSR значений длин прямолинейных участков траекторий L и значений курсовых углов $\Phi_1 = \Phi_2$, появляется возможность оценить время, затрачиваемое на реализацию каждой из этих стратегий.

Для этого используем выражение, аналогичное (16), которое в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} T &= \Delta t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2 \\ \Delta t_i &= (\varphi_{i+1} - \varphi_i) / u_i, i = 0, 2 \\ \Delta t_1 &= L/V \end{aligned} \quad (24)$$

Единственное отличие (24) от (16) связано с особенностями вычисления первого временного интервала,

который приходится на прямолинейный участок траектории. Выполнив расчет всех стратегий управления и сравнив между собой времена их реализации, можно однозначно выбрать оптимальную при заданных исходных данных стратегию управления (рис. 5).

Обсуждение результатов

Особенностью программной реализации данного алгоритма является то, что он позволяет не только получить оптимальную по времени траекторию перехода из точки в точку, но и при желании просмотреть все возможные варианты, что может быть очень полезно с практической точки зрения. Для примера на рис. 2 и рис. 5 приведены скриншоты, отображающие кривые Дубинса для всех возможных стратегий управления.

Из них следует, что две из них LSR (оптимальная) и $RLR-2$, хотя и дают близкие к оптимальным по времени результаты, но требуют от объекта значительного выбега вперед от требуемых исходных и конечных точек маневра (почти на 300 м при $R=100$ м). Естественно, что это недопустимо при наличии некоторых препятствий на пути следования объекта.

Но при этом у оператора БПЛА или судоводителя, который использует программную реализацию предложенного алгоритма, появляется возможность выполнить анализ всех возможных стратегий управ-

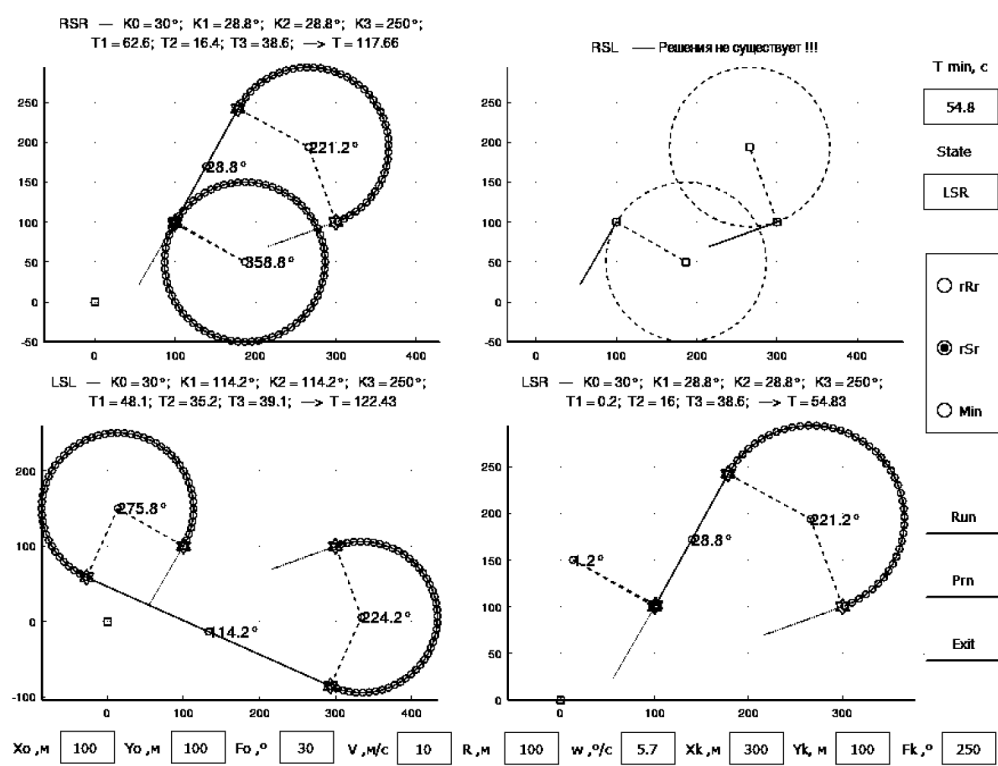


Рис. 5. Пример реализации стратегий RSR, RSL, LSL и LSR

ления и выяснить, что имеется стратегия, которая не превосходит выбег вперед на 150 метров, хотя и потребует на ее реализацию почти в полтора раза больше времени. Но при этом эта стратегия (RLR-1) является более безопасной и реализуемой.

Второй аспект возможности использования данного алгоритма, на котором хотелось бы остановиться, состоит в том, что полетное задание для БПЛА или движения исследовательского судна задается совокупностью путевых точек, определяемых их географическими координатами, а гладкое сопряжение двух прямолинейных траекторий в окрестности путевых точек выполняется дугами с заданным радиусом поворота.

В частности, на рис. 6 приведен фрагмент географической сетки $\pm 3^\circ$ по широте и $\pm 10^\circ$ по долготе в окрестности некоторой базовой точки с заданными на

ней семью путевыми точками. На этом же рисунке справа представлена стандартная сглаженная опорная траектории движения объекта.

Но если теперь предположить, что движение от $P3$ к $P4$ осуществляется вдоль линии газопровода или электропередач, а точка $P4$ – это координаты газокompрессорной станции или силовой электрической подстанции, то станет ясно, что в этом случае нужны иные подходы к формированию сглаживающих алгоритмов.

Решить данную задачу позволяет и предлагаемый в этой статье алгоритм. В случае обязательного и точного прохода всего участка $P3-P4$ задача сводится к задаче возврата в исходную точку, но с новым значением курса. В тех случаях, когда допустимо некоторое отклонение на конечной части участка $P3-P4$, но обязательным является попадание в точку

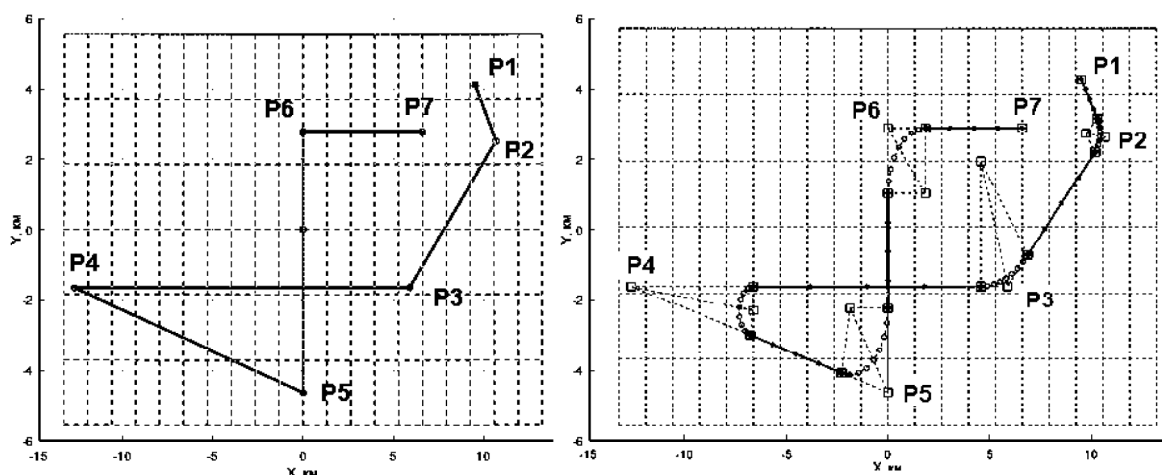


Рис. 6. Пример задания траектории движения семью путевыми точками

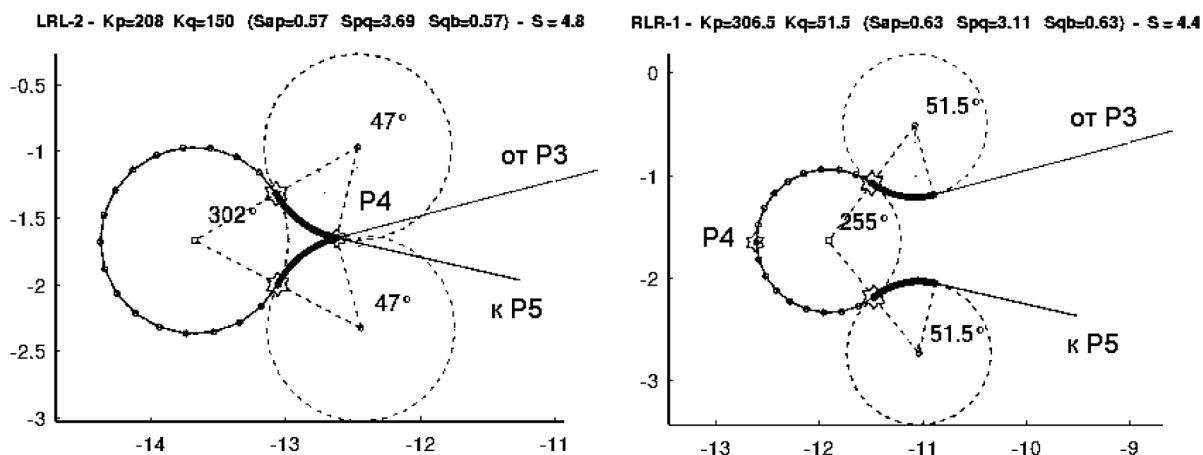


Рис. 7. Пример реализации траекторий с обязательным заходом в точку $P4$

$P4$, необходимо решение обратной задачи, а именно задачи поиска значений x_0, y_0 и x_k, y_k , равноотстоящих от точки $P4$ вдоль фрагментов траектории $P3-P4$ и $P4-P5$.

На рис. 7 представлены примеры реализации двух описанных выше задач при изменении в точке $P4$ курса сопрягаемых прямолинейных фрагментов траектории с $\varphi_0 = 255^\circ$ на $\varphi_k = 103^\circ$ и допустимом радиусе циркуляции, который принят равным $R_0 = 700$ метров. Если решение первой задачи просто следует из описанного выше алгоритма, то для реализации второй задачи требуется некоторая его модификация.

Заключение

Рассмотрен подход к формированию программных траекторий движения подвижных объектов как решение оптимальной по быстродействию задачи для машины Дубинса. Предложено вместо прямого решения принципа максимума Понтрягина и построения трехмерной линии переключения воспользоваться простым перебором возможных стратегий управления с целью определения среди них оптимальной по быстродействию. Показано, что в пользу этого говорит ограниченное для машин Дубинса количество возможных стратегий управления, а также простота аналитических расчетов для каждой из них, что позволяет выполнять эти расчеты практически в реальном времени.

Литература

1. Вагизов, М. Р. Алгоритм формирования гладких программных траекторий движения БПЛА / М.Р. Вагизов, С.П. Хабаров // Информация и Космос. – 2021. – № 2. – С. 122–130.
2. Хабаров, С. П. Формирование программных траекторий движения БПЛА с учетом ограничений на их управляемость / Хабаров С.П., Шилкина М.Л. // Цифровые технологии в лесном секторе. Материалы II Всероссийской научно-технической конференции-вебинара. Санкт-Петербург, 2021. – С. 141–143.
3. Dubins, L. E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents / L.E. Dubins // American Journal of Mathematics. – Vol. 79, No. 3. – 1957. – P. 497–516.
4. Марков, А. А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах / А.А. Марков // Сообщения Харьковского математического общества. – Т. 2–1, № 5, 6. – 1889. – С. 250–276.
5. Пацко, В. С. Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса / В.С. Пацко, А.А. Федотов // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2020. – Т. 26, № 1. – С. 182–197.
6. Patsko, V. S. Reachable set for Dubins car and its application to observation problem with incomplete information / V.S. Patsko, A.A. Fedotov // 27th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2019. – P. 489–494.

7. Симоненко, А. С. Множество достижимости для автомобиля Дубинса при несимметричном ограничении на управление / А.С. Симоненко, А.А. Федотов // Современные проблемы математики и ее приложений. Труды Международной (48-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. – 2017. – С. 79–87.

8. Бердышев, Ю. И. Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса / Ю.И. Бердышев // Труды ИММ УрО РАН. – Т. 22, № 1. – 2016. – С. 26–35.

9. Patsko, V. S. Three-dimensional reachable set at instant for the Dubins car: Properties of extremal motions / V.S. Patsko, A.A. Fedotov // 60th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, IACAS 2020, Tel Aviv and Haifa, Israel. – 2020. – P. 1033–1049.

10. Larry M. Silverberg, Dahan Xu. Dubins Waypoint Navigation of Small-Class Unmanned Aerial Vehicles Open Journal of Optimization, 2019, 8, 59–72 [Электронный ресурс]. https://www.scirp.org/pdf/OJOOp_2019071017562657.pdf, (дата обращения: 01.07.2021).

11. LaValle, S. M. Planning algorithms / Steven M. LaValle. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 844 p.

12. Аграчев, А. А. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. – М.: Физматлит, 2005. – 392 с.