

Моделирование случайных процессов на основе гиперфрактальной аппроксимации

Modeling of random processes on the basis of hyperfractal approximation

Смагин / Smagin V.

Владимир Александрович
(yaromir226@mail.ru)

доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ.
ФГБВОУ ВО «Военно-космическая академия имени
А. Ф. Можайского» МО РФ,
профессор кафедры метрологического обеспечения
вооружения, военной и специальной техники.
г. Санкт-Петербург

Гусеница / Gusenitsa Ya.

Ярослав Николаевич
(yaromir226@mail.ru)

кандидат технических наук.
Военный инновационный технополис «ЭРА»,
начальник испытательной лаборатории (информатики
и вычислительной техники).
г. Анапа

Ключевые слова: фрактал – fractal; гиперфрактальное распределение – hyperfractal distribution; квантование информации – information quantization; ресурс – resource; энтропия – entropy.

Предложен метод гиперфрактального распределения. Сущность данного метода рассмотрена на примере модификации модели квантования информации в виде нелинейного интегрального уравнения с целочисленным ядром. По полученному уравнению определены элементы фрактала. Рассмотрен расчетный пример. Проведена оценка результатов гиперфрактального распределения с использованием ресурса Н. М. Седякина и плотности распределения случайной величины энтропии. Приведены рекомендации по практическому использованию предложенного метода при моделировании случайных процессов.

The hyperfractal distribution method has been offered. The essence of this method is considered on the example of the information quantization model modification in the form of a nonlinear integral equation with an integer kernel. According to the produced equation, fractal elements are defined. The design example is considered. The hyperfractal distribution results are evaluated using the resource of N. M. Sedyakina and the distribution density of an entropy random value. Recommendations on the practical use of the proposed method in the simulation of random processes are given.

Введение

Теория фракталов разработана известным математиком Б. Мандельбротом и изложена во многих его научных работах, в том числе в [3]. В основе данной теории лежит понятие фрактала, т.е. структуры, состоящей из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Сейчас математические свойства фракталов используются при решении прикладных задач в самых разно-

образных сферах деятельности человека. В настоящей статье представлен метод моделирования случайных процессов на основе теории фракталов.

Сущность метода

Идея метода, как и в статье [5], посвященной гипердальной модели исследования немарковских процессов, базируется на использовании начальных моментов теоретического и аппроксимирующих распределений вероятностей случайных процессов. При этом, в отличие от работы [5], предлагаемый метод предполагает формализацию образующего элемента фрактала для случайного процесса и получение элементов фрактала n -го поколения. Кроме того, строится плотность вероятности распределения полученного фрактала, с помощью которой могут оцениваться показатели качества случайного процесса.

Модифицированная модель квантования информации

Воспользуемся известным в теории информации [1] соотношением для средних потерь $\Psi(x)$ информации от величины x , обусловленных квантованием случайного интервала времени T . Под квантованием подразумевается выбор целочисленного значения x . Выражение для $\Psi(x)$ имеет следующий вид:

$$\Psi(x) = (x + c) \int_0^{\infty} \left[\frac{z}{x} + 1 \right] f(z) dz. \quad (1)$$

В выражении (1) значение второго множителя будет равно некоторому k :

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{z}{x} \right] f(z) dz = k - 1. \quad (2)$$

Пусть $k=2$ и $f(z)$ известна на интервале $[0, \infty)$. Требуется представить выражение (2) в виде фрактала, в котором образующий элемент x обозначим через Φ_0 , а производный от него n -й элемент – через Φ_n .

Фрактал 0-го поколения запишем через следующую формулу

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{z}{\Phi_0} \right) f(z) dz = 1. \quad (3)$$

Выражение для фрактала 1-го поколения будет практически аналогично выражению для фрактала 0-го поколения. Однако, в отличие от последнего выражения, нелинейное уравнение (3) необходимо изменить таким образом, чтобы оно приняло следующую форму:

$$\int_{\Phi_0}^{\infty} \left(\frac{z - \Phi_0}{\Phi_1} \right) \frac{f(z)}{\int_{\Phi_0}^{\infty} f(u) du} dz = 1. \quad (4)$$

Здесь следует отметить, что в выражении (4) сомножитель с внутренним интегралом определяет условную вероятность успешного завершения исследуемого процесса на предшествующем интервале.

По аналогичной схеме определим фрактал 2-го поколения, образующий элементы Φ_0 и Φ_1

$$\int_{\Phi_0 + \Phi_1}^{\infty} \left(\frac{z - \Phi_0 - \Phi_1}{\Phi_2} \right) \frac{f(z)}{\int_{\Phi_0 + \Phi_1}^{\infty} f(u) du} dz = 1. \quad (5)$$

Откуда выразим фрактал n -го поколения

$$\int_{\sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i}^{\infty} \left(\frac{z - \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i}{\Phi_n} \right) \frac{f(z)}{\int_{\sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i}^{\infty} f(u) du} dz = 1. \quad (6)$$

Найти решение рассматриваемого нелинейного уравнения (6) в аналитическом виде не представляется возможным. Поэтому вычисление предлагается осуществлять способом непосредственной замены искомой величины так, чтобы высокая точность решения достаточно строго соответствовала максимальному значению искомого n -го элемента фрактала.

Расчетный пример

Пусть $f(z)$ подчиняется равномерному закону распределения на интервале $[0, 100]$.

Определим значение образующего элемента фрактала на основе решения уравнения (2). В результате получим $\Phi_0 = 33,33$ с точностью 0,00018. Таким образом, получается один элемент Φ_0 , длина которого составляет 33,33.

Теперь вычислим значение элемента Φ_1 путем решения уравнения (4) с известным Φ_0 . Значение величины $\int_{\Phi_0}^{\infty} f(u) du = 0,667$, а $\Phi_1 = 22,21$. При этом точность вычислений равна 0,00072. Таким образом, получим один элемент Φ_1 , длина которого составляет 22,21.

Далее определим значение элемента Φ_2 на основе решения уравнения (5) с известными Φ_0 и Φ_1 . Значение величины $\int_{\Phi_0 + \Phi_1}^{\infty} f(u) du = 0,445$, а $\Phi_2 = 8,63$. При этом точность вычислений равна 0,00052. Таким образом, получим один элемент Φ_2 , длина которого составляет 8,63.

Наконец определим значение элемента Φ_3 на основе решения уравнения (6) с известными Φ_0, Φ_1 и Φ_2 . Значение величины $\int_{\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2}^{\infty} f(u) du = 0,338$ а $\Phi_3 = 11,95$. При этом точность вычислений составляет 0,00049. Следовательно, имеем один элемент Φ_3 , длина которого составляет 11,95.

На этом ограничимся в вычислениях, считая, что величина Φ_4 будет достаточно близка к нулю.

Анализ результатов вычислений

Пусть длина образующих элементов соответствует продолжительности исследуемого процесса. Тогда продолжительность процесса, описанная с помощью элементов фрактала, имеет интервалы $t_0 = 33,33$; $t_1 = 22,21$; $t_2 = 8,63$; $t_3 = 11,95$.

Обозначим соответствующие вероятности нахождения процесса в представленных выше временных интервалах через $P_0(t_0) = 0,667$; $P_1(t_1) = 0,519$; $P_2(t_2) = 0,316$; $P_3(t_3) = 0$.

С учетом вышесказанного представим вероятности нахождения процесса на временных интервалах в виде графиков, как это показано на рис. 1. Если соединить плавной линией точку 1 на оси ординат с правыми концами всех отрезков, исключая самый нижний отрезок, то сгладится контур кривой непрерывной линией вероятности нахождения процесса на временных интервалах. При достаточном количестве отрезков эта линия плавно переходит в линию абсцисс.

Дополнительно на рис. 1 прямой пунктирной линией изображен график изменения вероятности $P(t)$ того, что событие, описанное плотностью распределения $f(z)$ на интервале $[0, 100]$, не может произойти. Как видно из рис. 1, $P(t)$ достаточно хорошо аппроксимируется концами отрезков $P_0(t_0)$ и $P_1(t_1)$. Это подтверждает корректность выполненной фрактальной аппроксимации заданного распределения вероятностей.

Оценивание эффективности результатов гиперфрактальной аппроксимации

Для оценивания эффективности результатов гиперфрактальной аппроксимации воспользуемся двумя подходами.

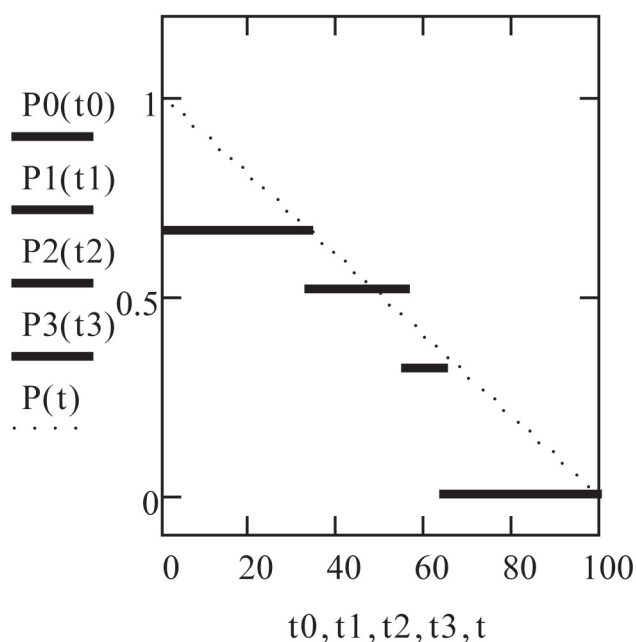


Рис. 1. Вероятности нахождения процесса на временных интервалах

Таблица 1

Стохастические характеристики элементов фрактала

P	H	α	σ
0,667	0,636	0,512	0,328
0,519	0,692	0,481	0,046
0,316	0,624	0,518	0,484
0	0	0,008	0,092

Один из этих подходов базируется на понятии ресурса Н. М. Седякина, который определяется по формуле:

$$r(t) = \int_0^t \lambda(z) dz,$$

где $\lambda(z)$ – интенсивность появления события в случайном процессе, которая на основе плотности $f(z)$ и функции $P(z)$ распределения определяется по формуле

$$\lambda(z) = \frac{f(z)}{P(z)}.$$

В дальнейшем будем использовать ресурс в качестве показателя важности элементов фрактала.

В виду того, что временные интервалы нахождения процесса равны $t_0=33,33$; $t_1=22,21$; $t_2=8,63$; $t_3=11,95$, то остаточный временной интервал $t_k > 64,4$. Найдем значение ресурса для вычисленных временных интервалов. В результате получим $r_0=0$; $r_1=0,334$; $r_2=0,555$; $r_3=0,642$; $r_k=0,358$.

Суммарный ресурс равен

$$r_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 r_i = 1,531.$$

Полный ресурс равен $r_{\Sigma}=r_{\Sigma}+r_k=1,889$. Доля ресурсов элементов фрактала составляет $r_{\Sigma}/r_{\Sigma} \cdot 100\% = 81,048\%$. Доля остаточного ресурса $r_k/r_{\Sigma} \cdot 100\% = 18,952\%$. Таким образом, определение фрактала третьего поколения для рассмотренного распределения вероятности оценивается 81,048 %, что является достаточно хорошей оценкой.

Другой подход при оценивании эффективности результатов гиперфрактальной аппроксимации основан на использовании плотности распределения случайной величины энтропии, которую будем использовать в дальнейшем в качестве показателя важности элементов фрактала. Данный подход приведен в [4] и использовался для решения различных задач, в том числе в [2] для оценивания стохастического подобия систем на основе энтропийного анализа.

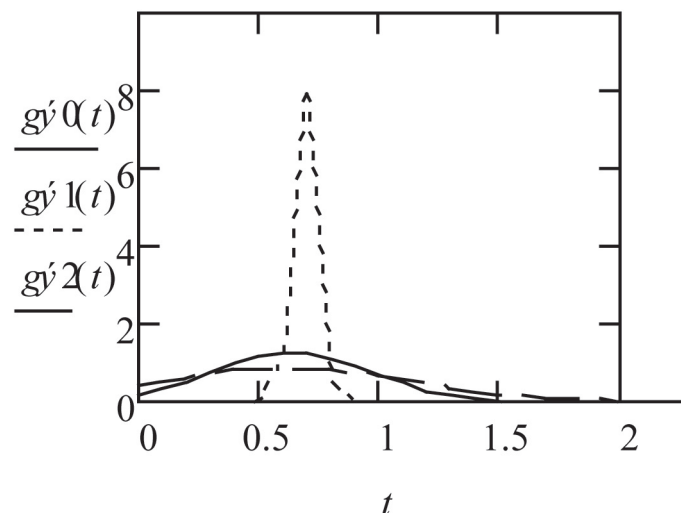


Рис. 2. Плотности энтропии элементов фрактала

Для его вычисления для каждого элемента фрактала найдем средние значения энтропии H , а также ее второй начальный момент α и среднее квадратическое отклонение σ . Значения указанных величин приведены в таблице 1.

Выполним аппроксимацию плотности распределения энтропии нормальным распределением:

$$g(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-H)^2}{2\sigma^2}}, \quad (10)$$

где C — константа нормирования плотности.

На рис. 2 приведены графики трех плотностей двух поколений фракталов. Из рисунка следует, что фрактал нулевого поколения имеет самую большую важность. Аналогичный вывод позволяет получить оценивание фрактала по показателю Херста. Например, показатель Херста для фрактала нулевого поколения имеет значение 0,521, первого — 0,503, второго — 0,502.

Заключение

Таким образом, предложенный метод базируется на использовании начальных моментов теоретического и аппроксимирующих распределений вероятностей случайных процессов. Разработанный метод, в отличие от известных, предполагает формализацию образующего элемента фрактала для случайного процесса и получение элементов фрактала n -го поколения. Данный метод может использоваться при исследовании случайных процессов в различных областях, например в теоретической метрологии при оценивании результатов измерений и метрологических характеристик средств измерений, в теории испытаний при оценивании результатов испытаний и характеристик объекта испытаний. Также на основе разработанного

метода могут быть получены и новые результаты в теории фракталов.

Литература

1. Андронов, А. М. Оптимальное в смысле заполнения квантование информации / А.М. Андронов, Т.Н. Бокоев // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1979. — № 3. — С. 154–158.
2. Гусеница, Я. Н. Метод оценивания стохастического подобия систем на основе энтропийного анализа / Я.Н. Гусеница // Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму. — 2017. — № 9–10 (111–112). — С. 13–17.
3. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. — 676 с.
4. Смагин, В. А. Приближенное определение функции распределения энтропии / В.А. Смагин, С.Ю. Смагин // Автоматика и вычислительная техника. — 2010. — № 2. — С. 27–37.
5. Смагин, В. А. Моделирование случайных процессов на основе гипердельтного распределения / В.А. Смагин, Г.В. Филимоных // Автоматика и вычислительная техника. — 1990. — № 5. — С. 25–31.