

Построение 3D-моделей ригидных объектов по одному изображению методом пространственных сеток

Design of 3D-models for rigid objects based on one image using spatial grid method

Казарян / Kazaryan M.

Маретта Леоновна
(marettak@bk.ru)

кандидат физико-математических наук, доцент, профессор Российской академии естествознания. Владикавказский филиал ФГБОУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» (Финансовый университет), заведующая кафедрой математики и информатики. г. Владикавказ

Шахрамьян / Shakhramanyan M.

Михаил Андраникович
(7283763@mail.ru)

доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, почетный строитель РФ, изобретатель СССР, дважды лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники, академик Российской академии естественных наук, Международной академии информатизации, Международной академии наук Евразии, Всемирной академии комплексной безопасности. Владикавказский филиал Финансового университета, профессор кафедры математики и информатики. г. Владикавказ

Рихтер / Richter A.

Андрей Алексеевич
(7283763@mail.ru)

кандидат технических наук. ФГБНУ «Научно-исследовательский институт аэрокосмического мониторинга «АЭРОКОСМОС», программист. г. Москва

Мурынин / Murynin A.

Александр Борисович
(AMurynin@bk.ru)

ФГБНУ «Научно-исследовательский институт аэрокосмического мониторинга «АЭРОКОСМОС», старший научный сотрудник. г. Москва

Ключевые слова: ригидный объект – rigid object; прямоугольная сетка – rectangular grid; ортотрансформированные изображения – ortho-transformed images; преобразования сдвига – shift transformation; преобразование поворота – rotation transformation; преобразование масштабирования – scaling.

Предлагается метод интерактивного построения трёхмерных моделей ригидных объектов по данным одного изображения с помощью координатных сеток и привязки частей объектов к ним при предположении о форме объекта. Описываются общие подходы к решению задачи. Приведена блок-схема метода построения 3D-модели и обрисованы основные этапы обработки. Показан математический аппарат метода, описана схема процедур построения контура (точек, линий, полигонов и полиэдров) трёхмерного объекта и его текстурного заполнения, пространственных преобразований объекта по одному изображению.

3D-models of rigid objects are proposed to be designed according to interactive method based on one image data using spatial grids with parts of the objects to be referenced to them assuming the shape of the object. General approaches to problem solving have been described. A block diagram of 3D-model design has been presented and main processing steps have been outlined. Mathematical tool of the method has been demonstrated. Procedure chart for designing the contour (points, lines, polygons and polyhedron) of a three-dimensional object and its texture filling, spatial transformations of the object based on a single image has been described.

Введение

Технология оценки рельефа местности по космическим изображениям к настоящему времени шагнула вперед: 3D-модели могут быть получены для местности и отдельных объектов поверхности планеты (причем не обязательно Земли); фигура и модели Земли и географических координат могут уточняться в зависимости от использованных методик и глубины расчета; расчет 3D-модели может проводиться дистанционно и без использования специального наземного оборудования; на базе разработанного матаппарата фотограмметрии формируются многочисленные методы оценки формы (объектов) и рельефа (местности), использующие те или иные исходные данные. Методы оценки 3D-моделей можно классифицировать на камеральные (измерительные) и аналитические. Первые основаны на измерениях стереоборудования (стереокомпараторов, высотометров и др.), а вторые строятся по данным изображений и метаданным.

Краткий обзор существующих методов 3D-моделирования объектов земной поверхности по их изображениям

Построение трёхмерных (3D) моделей ригидных объектов по их изображениям можно проводить с использованием данных изображений и их метаданных [1–11]. Применение различных методик построения 3D-моделей по изображениям также может быть осуществлено соответствующим программным обеспечением (Sketch Up, 3ds-max и др.) [12, 13]. Для большинства методов требуется большое количество исходной информации, в том числе дорогостоящей и малодоступной.

Методы построения 3D-моделей ригидных объектов по изображениям можно условно разделить на три класса.

Для методов первого класса, основанных на оценке рельефа по стереопаре, требуется наличие двух и более исходных снимков, снятых строго для одной территории с помощью специального оборудования. Стереоснимки, полученные радиометрами, устанавливаемыми на космические спутники ДЗЗ, дорогие и не всегда доступны для области наблюдения [14].

Методы второго класса, основанные на данных одного снимка и его метаданных, несмотря на использование только одного снимка, требуют дополнительной информации о нём: параметры освещенности и тени, угла фотографирования и др. Т.е. при отсутствии необходимых сведений об изображении по этим методам оценку 3D-модели произвести, как правило, затруднительно. К тому же многие из данных методов связаны с определенными объектами, условиями съемки или типами снимков [15, 16].

Методы третьего класса берут в основу два и более снимка близкой территории. Такую съемку можно осуществить без наличия каких-либо профессиональных навыков или специального оборудования. Для таких методов затраты времени на обработку в среднем больше, чем для других [17–19].

Разработка методов оценки 3D-объектов по одиночным изображениям активно ведётся в последние годы. Известен подход к автоматизированному получению моделей зданий, использующий связь обработки 2D-изображения и 3D-моделирования зданий, которые классифицируются по типу крыши [18, 20–22]. Известен также метод получения информации о размерах трехмерных объектов по геометрическим характеристикам теней от объектов на изображениях [15, 16, 23].

Предлагаемый в настоящей работе подход предназначен для получения трехмерной модели наблюдаемого ригидного объекта по данным одного изображения без привлечения атрибутивной информации об этих объектах и их изображениях.

Постановка задачи

Дано единственное изображение некоторого трёхмерного объекта без атрибутивной информации. При этом имеется априорная информация о форме этого объекта и некоторый способ соотнести местоположения ряда точек этой формы с пикселями изображения. Исходя из этого требуется восстановить размеры, положение и ориентацию объекта. Предлагаемый метод решения задачи основан на наложении на изображение объекта сетки линий с заданной структурой. В целом порядок построения 3D-модели объекта состоит из следующих процедур:

1. Выбор объекта и его формы на изображении.
2. Разметка опорных точек на изображении.
3. Расчёт геометрических размеров сетки.
4. Привязка сетки к изображению объекта.
5. Построение элементов объекта на сетке.
6. Закраска элементов объекта.

Форма объекта моделируется сеткой линий, натянутой на его поверхность (здесь далее координатная сетка). Самая простая, базовая форма сетки прямоугольная, расположенная на трёх гранях прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую точку, состоящая из линий, параллельных его рёбрам. Более сложные формы предлагается получить из этой при помощи ряда преобразований, описанных далее. Сетка может состоять из разного числа линий. Сетка, как и сам объект, существует в пространстве. При проецировании на плоскость изображения элементы сетки сопоставляются с его пикселями. Отыскав каким-либо способом пиксели, соответствующие элементам сетки, например, отметив на изображении рёбра прямоугольного здания, можно решить задачу определения его положения, ориентации и размеров.

Метод построения 3D-модели ригидных объектов с помощью пространственных сеток

Общая схема метода. Общая схема исполнения метода интерактивного построения 3D-модели ригидного объекта по данным одного изображения и при отсутствии атрибутивных данных об изображении приведена на рис. 1.

На входе ригидный объект T , заданный изображением, которое описывает его некоторого ракурса. На изображении вся поверхностная область объекта делится на видимую (обозреваемую на изображении) и невидимую части. Поэтому восстанавливается 3D-модель только видимой части.

В цикле I происходит перебор областей изображения объекта, которые описываются простыми геометрическими фигурами (квадрат, окружность, треугольник и т.д.) или телами (куб, шар, конус и т.д.). В результате формируется 3D-модель каждой области, каждой из них соответствует составляющий ригидный объект (подобласть в составе объекта T) и сетка, задаваемая по опорным точкам. Структура задания опорных точек определяет тип, а их координаты размеры сетки. По заданным опорным точкам формируется модель сетки.

В цикле II происходит перебор элементов составляющего объекта, в результате чего элемент устанавливается на сетке (устанавливаются его форма, пространственное положение, цвет и другие параметры). Т.е. проводятся построения элементов объекта на самой сетке. Сначала на сетке строится контур объекта по точкам, линиям, полигонам и полиэдрам (разметка объекта). Для элементов не в узлах или линиях сетки могут потребоваться дополнительные геометрические построения. При этом для удобства разметки над сеткой проводятся геометрические преобразования. Затем построенным элементам присваиваются те или иные значения яркости, заданные в одном или более каналах (закраска объекта).

Невидимая часть объекта может быть восстановлена по другим изображениям, для которых выполняются те же процедуры. При необходимости в интерактивном режиме проводятся геометрические преобразования сетки. В том числе пространственные преобразования частей объекта, которые пространственно определены заданием их пространственной привязки по дополнительным опорным точкам на изображении.

Координатные сетки. Введём необходимые в дальнейшем системы координат.

Система координат изображения wxy двумерная декартова, в которой начало координат w установлено в левом верхнем углу изображения, ось x направлена в порядке возрастания номеров столбцов, y строк раstra. Единицей расстояния в этой системе служит пиксель. Координаты в этой СК далее обозначаются строчными буквами: (x, y) .

Пространственная система координат $Ox_1x_2x_3$ трёхмерная декартова. В этой системе задаются ригидные объекты. Единицей расстояния в этой системе является метр. Координаты в этой СК далее обозначаются прописными буквами: (X, Y, Z) .

Также зададим вспомогательную узловую систему координат $0_{n_1} \dots n_t, i=1..t, t>1, 0$ – начало координат, n_i – координатные оси, t – размерность. Координаты точек в этой СК будем называть узловыми координатами и обозначать $\vec{n} = (n_1, \dots, n_t)$. Точки координатной сетки могут описываться как линейными, так и угловыми координатами, они заданы также в пространственной системе координат и имеют проекции в системе координат изображения.

Таким образом, в узловой СК задаётся координатная сетка S . Сетка задаётся параметрами $\zeta = \{N_i, n_{\min}(i), n_{\max}(i)\}$, где N_i – плотность, $n_{\min}(i)$ и $n_{\max}(i)$ – минимальные и максимальные узловые координаты сетки по i -й оси. При этом шаг h_i и размер m_i сетки по i -й оси:

$$h_i = m_i / N_i, m_i = n_{\max(i)} - n_{\min(i)},$$

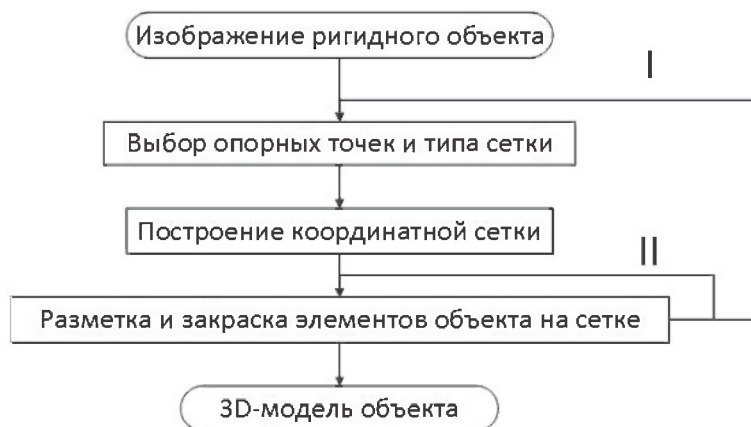


Рис. 1. Схема исполнения метода

На сетке можно задать узлы, рёбра, грани и полиэдры. Узлом может быть точка P , имеющая те или иные координаты h_i . Ребро – отрезок, соединяющий два узла. Грань – замкнутая область, ограниченная полигоном, состоящим из рёбер. Полиэдр – замкнутая область, ограниченная множеством полигонов.

Типы координатных сеток. Координатные сетки различаются по типу и форме.

Тип сетки зависит от способа проецирования, которым получено обрабатываемое изображение. На изображении, полученном ортогональным проецированием, строится ортотрансформированная сетка S , имеющая постоянное пространственное разрешение. На изображении, полученном центральным проецированием от фокальной точки, строится перспективная сетка S' с переменным пространственным разрешением. Две эти сетки могут быть переведены друг в друга преобразованием, описанным ниже.

Базовая форма сетки прямоугольная. Она строится в декартовой СК, число осей $t=3$, оси взаимно ортогональны. Аффинная сетка строится в аффинной СК, число осей $t=3$, но оси не ортогональны. Посредством геометрических преобразований сетки других форм могут быть приведены к прямоугольной для удобства расчётов.

Сетки могут быть линейными и нелинейными. Нелинейные сетки задаются линейными и угловыми координатами и им соответствуют нелинейные геометрические фигуры, в частности, коническая, цилиндрическая, эллиптическая сетки (рис. 2).

Коническая сетка имеет форму конуса (рис. 2,а): O – центр эллипса в основании, Π – плоскость основания, B – вершина, OB – ось конуса. Координаты точки P : n_1 – расстояние от точки P до OB , n_2 – угловое расстояние точки на плоскости, параллельной Π , n_3 – высота точки.

Цилиндрическая сетка имеет форму цилиндра (рис. 2,б): a и b полуоси эллипсов в основаниях Π , O и B центры нижнего и верхнего оснований. Цилиндрическая сетка имеет те же координаты n_1, n_2, n_3 , что и коническая.

Эллиптическая сетка имеет форму эллипсоида (рис. 2,в): a, b, c – полуоси, O – центр эллипсоида, Π –

плоскость экватора. Координаты сетки: n_1 – нормированное расстояние от точки P до O , n_2 – угловое расстояние точки в плоскости Π , n_3 – в плоскости, перпендикулярной Π .

Линейные сетки (пирамидальная, призматическая и др.) описываются линейными координатами или формируются из нелинейных сокращением плотности до малых значений. При малых значениях N_2 ($N_2 < 6$) пирамидальная сетка соответствует конической (N_2 -угольная пирамида), призматическая – цилиндрической (N_2 -угольная призма).

Классификации геометрических фигур и тел соответствует классификация сеток установкой определённых ограничений на параметры сетки. Например, прямой конус бывает круговым ($a=b$), усечённым ($n_{\min}(3)>0, n_{\max}(3)<N_3$), двухполосным ($n_{\min}(3)<0, n_{\max}(3)>0$).

Сетки могут быть прямыми и наклонными. Прямым соответствуют прямые геометрические фигуры и тела, наклонным – наклонные, например прямой или наклонный цилиндр, прямой или наклонный конус.

Сетка с одними и теми же параметрами может иметь разную «кристаллическую» структуру в зависимости от выбора координат. Например, для конической сетки помимо n_1, n_2, n_3 могут быть введены координаты n_4 – угол между OB и PB , n_5 – угол между OB и OP . Сетка может быть построена по любым трём координатам, остальные выражаются через них.

Геометрические преобразования узловых координат координатных сеток. Опишем основные геометрические преобразования узловых координат координатных сеток.

С помощью геометрических преобразований $\chi: \bar{n} \rightarrow \bar{n}'$ сетка S с узловыми координатами $\bar{n}$, заданная параметрами ζ , может быть преобразована в сетку S' с узловыми координатами $\bar{n}'$, заданную параметрами ζ' .

Частные случаи геометрических преобразований сетки: движение, симметрирование и изменение формы сетки; преобразование сетки из ортотрансформированной в перспективную и наоборот; изменение ракурса сетки и изображения объекта, к которому она привязана.

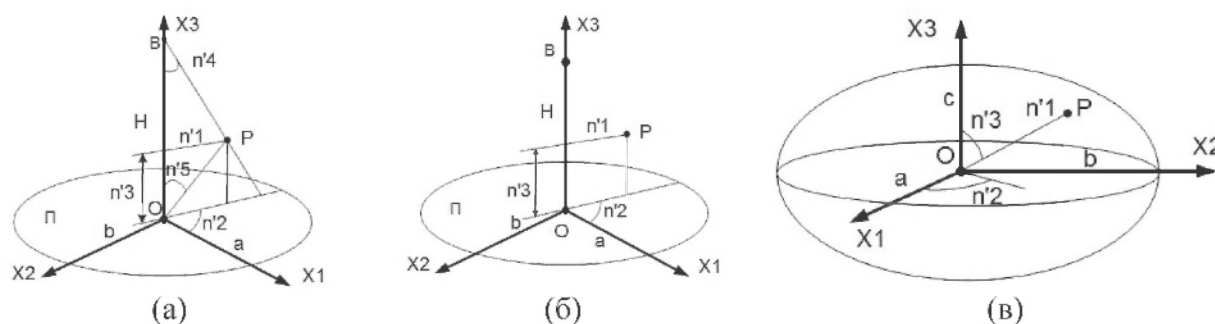


Рис. 2. Системы отсчёта сеток: а) коническая; б) цилиндрическая; в) эллиптическая

Рассмотрим преобразования движения (I), симметрирования (II) и изменения формы сетки (III).

I. Посредством преобразований движения выполняется движение сетки относительно изображения или изображения относительно сетки. Движение описывается аффинным преобразованием $\bar{n}' = F\bar{n} + G$, где F и G – некоторые матрицы-константы.

Простейшее преобразование тождественное, переводящее сетку в саму себя: F – единичная матрица, G – нулевая матрица (движения не происходит). Основные типы движений: сдвиг, поворот, растяжение. Преобразования координат для данных типов движений [24]:

$$\begin{aligned}\bar{n}' &= F_{31}\bar{n}, \bar{n}' = F_{32}(\bar{n} - \bar{n}_0^T) + \bar{n}_c^T, \\ n' &= F_{33}(n - n_0), F_3 = F_{33}F_{32}F_{31},\end{aligned}$$

где F_1 – оператор сдвига, F_2 – растяжения, F_3 – поворота.

$$\begin{aligned}F_1 &= \begin{pmatrix} \Delta n_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta n_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta n_3 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix}, \\ F_{31} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, \\ F_{32} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, F_{33} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Здесь $\Delta \bar{n} = [\Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3]$ и $\bar{q} = [q_1 q_2 q_3]$ – векторы сдвига и растяжения, Δn_i и q_i – сдвиг и растяжение по i -й оси. $\bar{n}_c = [n_{c1} n_{c2} n_{c3}]$ и $\bar{n}_0 = [n_{01} n_{02} n_{03}]$ – центры растяжения и поворота в пространстве, n_{ci} и n_{0i} – координаты точек по i -й оси. $\bar{\alpha} = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]$ – вектор поворота, α_i – поворот вокруг i -й оси. F_{3i} – матрица поворота вокруг i -й оси на угол α_i , F_3 – матрица поворотов в последовательности: вокруг первой, второй и третьей оси.

II. Посредством преобразований симметрирования выполняется привязка «копий» сетки на изображения однотипных объектов. Симметрирование также относится к аффинным преобразованиям. В частности, симметрия по прямым «зеркалам» [24]: по точке (центральная симметрия), по прямой (осевая симметрия), по плоскости (зеркальная симметрия).

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, G_i = 2 \begin{bmatrix} l_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & l_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & l_{i3} \end{bmatrix},$$

$i=1$ – центральная, $i=2$ – осевая, $i=3$ – зеркальная симметрия.

$$l_{11} = c_1, l_{12} = c_2, l_{13} = c_3,$$

$$l_{21} = \frac{n_1 m_1^2 + k_1 m_2^2 + k_1 m_3^2 - m_1(m_2(k_2 - n_2) + m_3(k_3 - n_3))}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2},$$

$$l_{22} = \frac{m_2(l_{21} - k_1)}{m_1} + k_2, l_{23} = \frac{m_3(l_{21} - k_1)}{m_1} + k_3,$$

$$l_{31} = \frac{-q_1 t_1^2 + n_1 t_2^2 + n_1 t_3^2 - t_1(t_2(q_2 - n_2) + t_3(q_3 - n_3))}{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}.$$

Центр симметрии задан точкой $c = [c_1 c_2 c_3]$. Ось симметрии задана коллинеарным вектором $\bar{m} = [m_1 m_2 m_3]$ и точкой $k = [k_1 k_2 k_3]$. Плоскость симметрии задана нормальным вектором $\bar{t} = [t_1 t_2 t_3]$ и точкой $q = [q_1 q_2 q_3]$.

III. Посредством преобразований формы находятся узловые координаты сетки одной формы по узловым координатам сетки другой формы. Для преобразований в прямоугольную сетку S сетки S' другой формы сначала рассчитывается сетка координат:

$$n'_i = h'_i(n'_{\min(i)} \dots n'_{\max(i)}), h'_i = m'_i / N'_i,$$

где m'_i – размеры, N'_i – плотность, $n'_{\min(i)}$ и $n'_{\max(i)}$ – минимальные и максимальные значения узловых координат сетки S' по i -й оси. Величины $m'_i, N'_i, n'_{\min(i)}, n'_{\max(i)}$ заданы.

Затем по найденным координатам по обратному преобразованию χ^{-1} узловые координаты сетки S' преобразуются в узловые координаты сетки S : $n' \rightarrow n$.

Примеры преобразований сетки другой формы в прямоугольную сетку:

- цилиндрической: $n_1 = an'_1 \cos n'_2, n_2 = bn'_1 \sin n'_2, n_3 = n'_3$;
- эллиптической: $n_1 = an'_1 \cos n'_2 \sin n'_3, n_2 = bn'_1 \sin n'_2 \sin n'_3, n_3 = cn'_1 \cos n'_3$.

Более сложные преобразования получаются цепочкой преобразований χ . В частности, для преобразований прямой сетки в наклонную цепочка имеет два звена: из прямоугольной сетки в аффинную, из аффинной в сетку заданной формы.

Порядок построения модели. Опишем порядок построения трёхмерной модели.

Выбор объекта и его формы на изображении. Выбор объекта и его формы на изображении проводится экспертом, исходя из визуального распознавания типа геометрической фигуры, которую напоминает данный объект.

Разметка опорных точек на изображении. Выбор опорных точек рассмотрим на примере прямоугольной сетки, которая построена на ортотрансформированном изображении [25].

Прямоугольная сетка строится по четырем опорным точкам на изображении o, a_1, a_2, a_3 . На рис. 3 показано изображение объекта и выбор опорных точек на нём. Объект «здание стандартной прямоугольной формы» (строение в составе хозяйственной зоны полигона твёрдых бытовых отходов Кучино Московского

региона). Точка o на нём выбрана на углу здания, а точки a_1 , a_2 и a_3 – на его ортогональных рёбрах.

Расчёт геометрических размеров сетки. Можно задать пространственную СК так, чтобы её орты OX_i , $i = 1, 2, 3$ проецировались в направления, задаваемые векторами a_i (см. рис. 4).

При этом прообразами опорных точек a_i , $i = 1, 2, 3$ будут точки A_i , лежащие на осях пространственной системы координат. Без ограничения общности можно считать, что плоскость изображения π проходит через одну из этих точек, пусть это будет A_3 , далее обозначаемая без индекса как A . Точки B и C являются пересечениями плоскости π с осями OX_1 и OX_2 . Обозначим координаты опорных точек в СК изображения: $o=(x_0, y_0)$, $a_1=(x_1, y_1)$, $a_2=(x_2, y_2)$, $a_3=(x_3, y_3)$. Координаты этих четырех точек

$$\Omega = \{x_i, y_i\}_{i=0}^3 \quad (1)$$

являются исходными данными для расчёта геометрических размеров сетки.

В пространственной системе координат обозначим координаты точек: $o(X_0, Y_0, Z_0)$, $A(X_A, Y_A, Z_A)$, $B(X_B, Y_B, Z_B)$, $C(X_C, Y_C, Z_C)$, при этом (см. рис. 5) $X_A = Y_A = Y_B = X_C = Z_C = 0$. Из треугольников I по теореме Пифагора:

$$X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = X_B X_0 - Y_C Y_0 - Z_A Z_0. \quad (2)$$

Из треугольников II в СК π углы α , β , γ соответственно между векторами a_2 и $\bar{a}_3$, $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_1$, $\bar{a}_1$ и a_2 найдём через скалярное произведение:

$$\begin{aligned} C_\alpha = \cos \alpha &= \frac{\bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3}{|\bar{a}_2| \cdot |\bar{a}_3|}, \\ C_\beta = \frac{a_2 \cdot a_1}{|\bar{a}_3| \cdot |\bar{a}_1|}, \quad C_\gamma = \cos \gamma &= \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0), \quad \bar{a}_2 = (x_2 - x_0, y_2 - y_0), \\ \bar{a}_3 &= (x_3 - x_0, y_3 - y_0). \end{aligned} \quad (4)$$

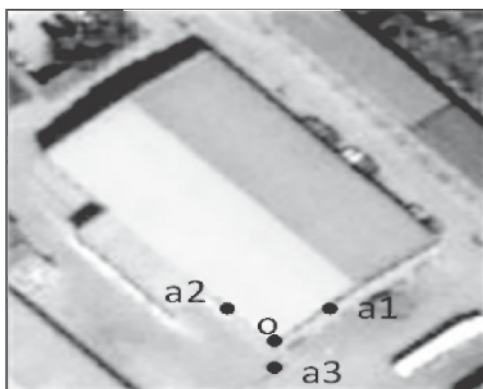


Рис. 3. Пример выделения опорных точек на изображении

Из треугольников III в пространственной СК углы α , β , γ соответственно между векторами $\bar{c}$ и a , $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\bar{b}$ и c ($a = OA$, $b = OB$, $c = OC$) через скалярное произведение:

$$\begin{aligned} C_\alpha = \cos \alpha &= \frac{a \cdot c}{|\bar{a}| \cdot |\bar{c}|}, \\ C_\beta = \cos \beta &= \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |\bar{b}|}, \quad C_\gamma = \cos \gamma = \frac{b \cdot c}{|b| \cdot |c|}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} a &= (X_A - X_0, Y_A - Y_0, Z_A - Z_0), \\ b &= (X_B - X_0, Y_B - Y_0, Z_B - Z_0), \\ c &= (X_C - X_0, Y_C - Y_0, Z_C - Z_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда из (5–6) получим после преобразований с учётом (2):

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \frac{-Z_A Z_0}{\sqrt{Z_A^2 - Z_A Z_0} \cdot \sqrt{Y_C^2 - Y_C Y_0}}, \\ C_\beta &= \frac{Z_A Z_0}{\sqrt{Z_A^2 - Z_A Z_0} \cdot \sqrt{X_B^2 - X_B X_0}}, \\ C_\gamma &= \frac{-Z_A Z_0}{\sqrt{X_B^2 - X_B X_0} \cdot \sqrt{Y_C^2 - Y_C Y_0}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) также с учётом (2):

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \left(1 - \frac{X_B}{X_0}\right) C_\beta C_\gamma, \quad C_\beta = \left(1 - \frac{Y_C}{Y_0}\right) C_\alpha C_\gamma, \\ C_\gamma &= \left(1 - \frac{Z_A}{Z_0}\right) C_\alpha C_\beta. \end{aligned} \quad (8)$$

Из треугольников I в пространственной СК (см. рис. 5 по свойствам синусов с учётом (2)):

$$X_0 = X_B \sin^2 \xi, \quad Y_0 = Y_C \sin^2 \psi, \quad Z_0 = Z_A \sin^2 \zeta. \quad (9)$$

Из (8) и (9):

$$\begin{aligned} \sin \xi &= \left(1 - \frac{C_\alpha}{C_\beta C_\gamma}\right)^{-2}, \quad \sin \psi = \left(1 - \frac{C_\beta}{C_\alpha C_\gamma}\right)^{-2}, \\ \sin \zeta &= \left(1 - \frac{C_\gamma}{C_\alpha C_\beta}\right)^{-2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для треугольников I соответственно по свойствам косинусов:

$$\begin{aligned} m_1 = \frac{OB}{oB} &= \frac{1}{\cos \xi}, \quad m_2 = \frac{OC}{oC} = \frac{1}{\cos \psi}, \\ m_3 = \frac{OA}{oA} &= \frac{1}{\cos \zeta}. \end{aligned} \quad (11)$$

$$l_1 = r \cdot m_1, \quad l_2 = r \cdot m_2, \quad l_3 = r \cdot m_3. \quad (12)$$

где r – пространственное разрешение изображения; m_i и l_i – масштабирующие и осевые коэффициенты на соответственных координатных осях, постоянные для данного ортотрансформированного изображения. Они дают пересчёт длины отрезка, измеренного вдоль координатной оси, из СК изображения в пространственную. Масштабирующие коэффициенты дают пересчёт в пикселях, осевые – в физических единицах.

Из (10) и (12):

$$\begin{aligned} l_1 &= r \left[1 - \left(1 - \frac{C_\alpha}{C_\beta C_\gamma} \right)^{-4} \right]^{-0.5}, \quad l_2 = r \left[1 - \left(1 - \frac{C_\beta}{C_\alpha C_\gamma} \right)^{-4} \right]^{-0.5}, \\ l_3 &= r \left[1 - \left(1 - \frac{C_\gamma}{C_\alpha C_\beta} \right)^{-4} \right]^{-0.5}, \end{aligned} \quad (13)$$

аналогичные выражения для l_2 и l_3 ,

Таким образом, для расчёта осевых коэффициентов прямоугольной сетки сначала для опорных точек (1) по (3–4) находим C_α , C_β , C_γ , а затем по (13) величины осевых коэффициентов. Тогда пространственные координаты точки с координатами Ω на изображении:

$$X_i = l_i \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Если оси декартовой СК не заданы явно, то их можно найти геометрическими построениями, а затем отметить на них опорные точки (см. рис. 6). В данном случае координатная сетка (в форме усечённого конуса) идентифицируется по опорным точкам $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$. Структура опорных точек своя для каждого типа сетки.

Привязка сетки к изображению объекта. Рассмотрим зависимость между узловыми координатами и координатами изображения на примере прямоугольных сеток: ортотрансформированной и перспективной.

На рис. 7, а показана геометрическая схема для ортотрансформированной сетки. Прямые k_1 и k_6 параллельны оси OX_1 , k_2 и $k_4 - OX_2$, k_3 и $k_5 - OX_3$. Точка P имеет узловые координаты $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ и координаты на изображении $p = (x, y)$.

$$p = Mn + p_0, p_0 = (x_0, y_0)^T, M := \begin{pmatrix} d_{x1} & d_{x2} & d_{x3} \\ d_{y1} & d_{y2} & d_{y3} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$d_{xi} = \frac{\Delta x_i}{N_i}, \bar{d}_{yi} = \frac{\Delta y_i}{N_i}, \Delta x_i = x_i - x_0, \Delta y_i = y_i - y_0.$$

На рис. 7,б показана геометрическая схема для перспективной сетки. Точка фокуса f_i , $i=1,2,3$ определяется расстоянием R_i по i -й оси от начала координат. На перспективных изображениях точки f_i – точки пересечения линий k_1 и $OX_1(f_1)$, k_2 и $OX_2(f_2)$, k_3 и $OX_3(f_3)$, параллельных в СК $OX_1X_2X_3$ и лежащих в ортогональных плоскостях, но пересекающихся в СК $иху$. В этом случае R_i можно найти разметкой линий k_i , k_j на изображении, нахождения точек f_i и расстояния до них от точки o в СК $иху$. С другой стороны, R_i находятся решением уравнений

$$\Delta x'_i \ln \left(1 - \frac{\Delta r'_i}{R_i} \right) = \Delta x_i \ln \left(1 - \frac{\Delta r'_i}{R_i} \right),$$

$$\Delta r_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}, \Delta r'_i = \sqrt{\Delta x_i'^2 + \Delta y_i'^2}, \Delta x'_i = x'_i - x_0,$$

$$\Delta y'_i = y'_i - y_0, i = 1, 2, 3,$$

где (x', y') – координаты опорных точек a'_i в СК wxy , размечаемых на изображении на осях OX , Δr_i и $\Delta r'_i$ – расстояния от точки o до точек a_i и a'_i в СК изображения, Δx_i и Δy_i – проекции отрезка Δr_i на оси wx и wy , $\Delta x'_i$ и $\Delta y'_i$ – проекции отрезка $\Delta r'_i$ на оси wx и wy .

Преобразования узловых координат $\bar{n}$ ортотрансформированной сетки в узловые координаты $\bar{n}'$ перспективной сетки точки

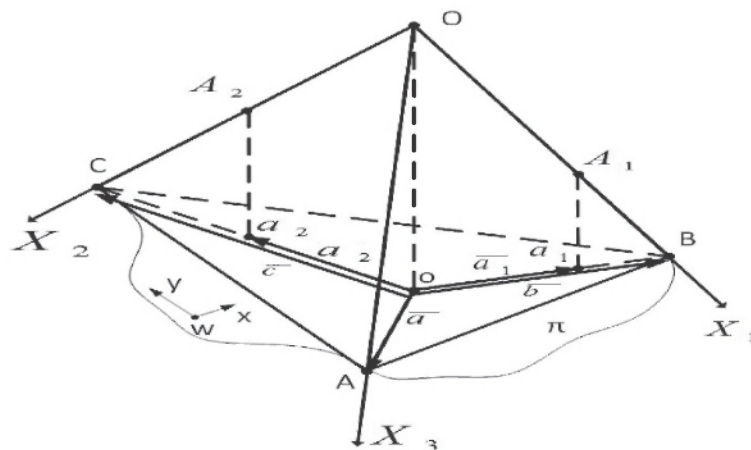


Рис. 4. Пространственная система координат и её проекция

$$n'_i = 1 - q_i^{n_i}, q_i = \sqrt[n_i]{1 - \frac{\Delta r_i}{R_i}}, \quad (16)$$

где q_i – знаменатель геометрической прогрессии, задающий уменьшение масштаба с расстоянием на i -й оси. Координаты точки f_i в СК изображения

$$x_{f_i} = x_0 + R_i \frac{\Delta x_i}{\Delta r_i}, y_{f_i} = y_0 + R_i \frac{\Delta y_i}{\Delta r_i}.$$

Преобразования координат перспективной сетки из узловых $\bar{n}$ в координаты изображения p' :

$$\bar{p}' = \begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_D - y_{f3} & x_{f3} - x_D \\ y_{f1} - y_E & x_E - x_{f1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_{f3}y_D - x_Dy_{f3} \\ x_Ey_{f1} - x_{f1}y_E \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 - y_{f2} & x_{f2} - \hat{x}_1 \\ y_{f1} - \hat{y}_2 & \hat{x}_2 - x_{f1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_{f2}\hat{y}_1 - \hat{x}_1y_{f2} \\ \hat{x}_2y_{f1} - x_{f1}\hat{y}_2 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_3 - y_{f2} & x_{f2} - \hat{x}_3 \\ y_{f3} - \hat{y}_2 & \hat{x}_2 - x_{f3} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_{f2}\hat{y}_3 - \hat{x}_3y_{f2} \\ \hat{x}_2y_{f3} - x_{f3}\hat{y}_2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{x}_i = x_0 + (x_{f_i} - x_0) \cdot n'_i, \quad \hat{y}_i = y_0 + (y_{f_i} - y_0) \cdot n'_i.$$

На рис. 8 приведены модели прямоугольной сетки при постоянном (а) и переменном (б) пространственном разрешении. Вторая получена из первой преобразованием (16). Координаты опорных точек $\Omega = \{0, 0, 10, 10, -20, -5, 20, 0\}$, $N_1 = N_2 = N_3 = 3$. Расстояния до фокусов: $R_1 = 1000$, $R_2 = -1000$, $R_3 = 100$.

На рис. 9 показаны примеры преобразований для сетки на рис. 8, а: 1) сдвиг – $\Delta \bar{n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (рис. 9,а);

2) поворот – $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\bar{n}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (рис. 9,б); 3) растяжение – $\bar{q} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{n}_e = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (рис. 9,б). На рисунках обозначены опорные точки o , a_1 , a_2 , a_3 исходной сетки.

На рис. 10 приведены примеры нелинейных сеток: 1) коническая – $m_1 = 1$, $m_2 = 2\pi$, $m_3 = 10$, $N_1 = 2$, $N_2 = 20$, $N_3 = 3$, $a = b = 10$; 2) цилиндрическая – $m_1 = 1$, $m_2 = 2\pi$, $m_3 = 10$, $N_1 = 2$, $N_2 = 20$, $N_3 = 2$, $a = b = 10$; 3) эллиптическая (сферическая) – $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 2\pi$, $N_1 = 1$, $N_2 = 20$, $N_3 = 20$, $a = b = c = 10$. Исходная сетка – прямоугольная (см. рис. 8, а).

На рис. 11 – примеры линейных сеток: 1) пирамидальная (из соответствующей конической сетки) – $N_1 = 2$, $N_2 = 3$, $N_3 = 3$; 2) призматическая (из соответствующей цилиндрической сетки) – $N_1 = 2$, $N_2 = 3$, $N_3 = 2$.

Построение элементов объекта на сетке. При построении элементов объекта на сетке, привязанной к изображению, проводится: привязка интерактивно выбранной точки к ребру сетки (I); преобразование узловых координат выбранных элементов в линейные (II). В результате формируется контур объекта, задаваемый множеством всех установленных элементов (III). В процессе разметки (закраски) объекта выполняются геометрические преобразования координатной сетки и привязанного к ней изображения для удобства построения модели.

I. Привязка интерактивно выбранной точки к ребру сетки.

Построения 3D-модели на сетке (по её узлам, рёбрам и граням) выполняются по преобразованию $p \rightarrow \bar{n}$.

Для интерактивно выбранной на изображении точки P с координатами $\bar{p} = (x, y)$ в СК wxu находится ближайшее ребро P_1P_2 , где P_1 и P_2 – соседние узлы сетки:

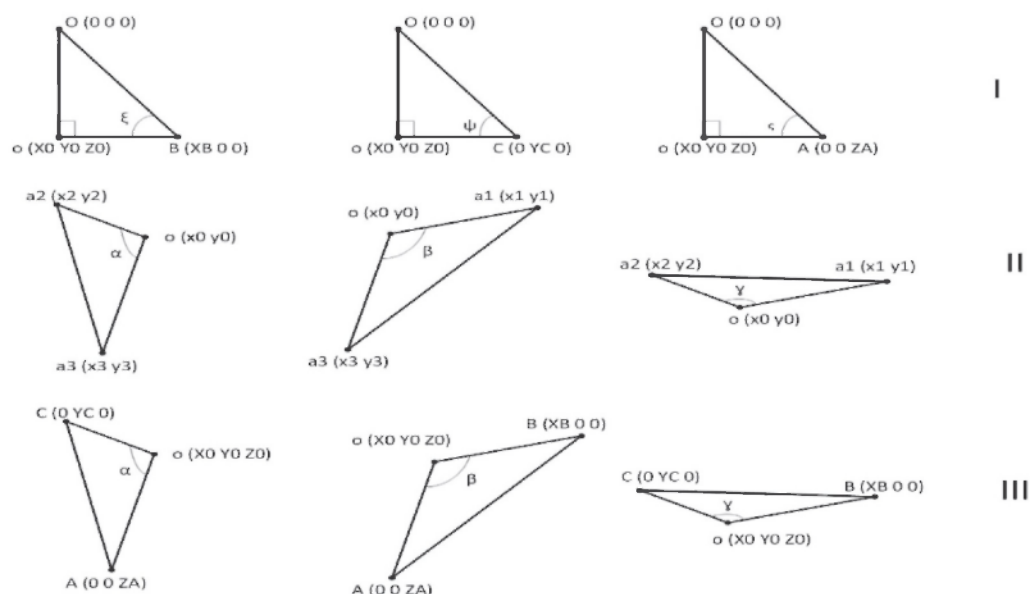
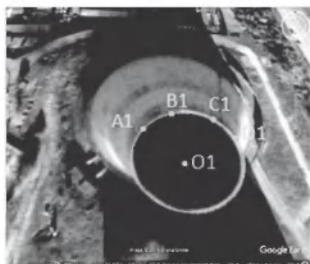
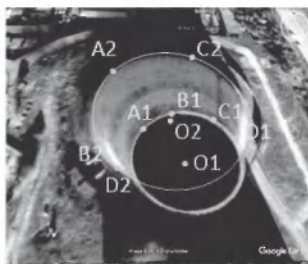


Рис. 5. Треугольники в системах координат

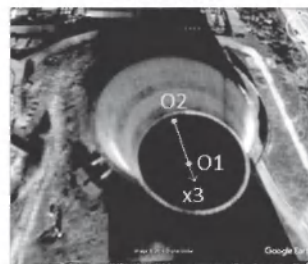
Построение верхнего эллипса по 4 точкам и определение центра



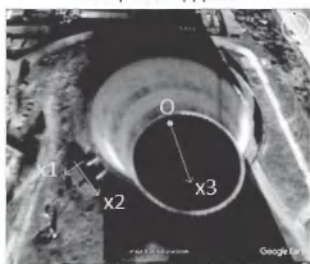
Построение нижнего эллипса по 4 точкам и определение центра



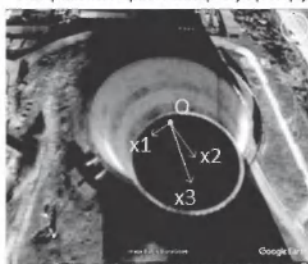
Построение направляющей оси аппликат



Построение направляющих осей абсцисс и ординат



Параллельный перенос направляющих к общему центру



Привязка пространственной сетки к осям x, y, z

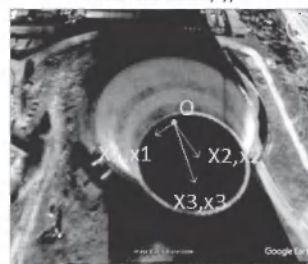


Рис. 6. Геометрические построения для получения образа пространственной декартовой системы координат (на примере тепловых башен)

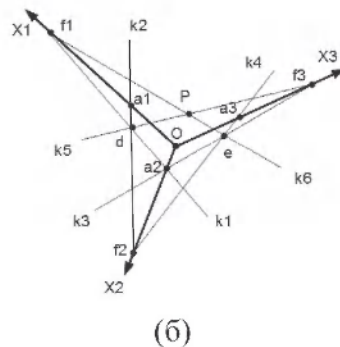
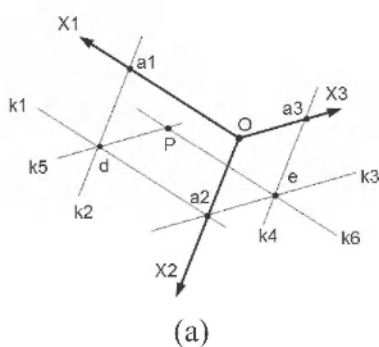


Рис. 7. Прямоугольная сетка: а) ортотрансформированная; б) перспективная (геометрические построения для расчета координат точки Р)

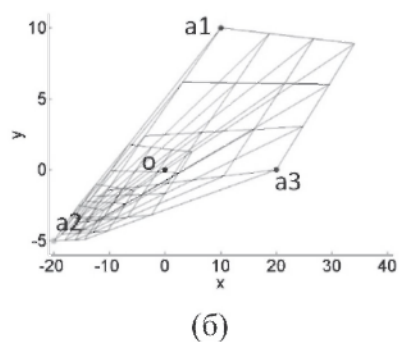
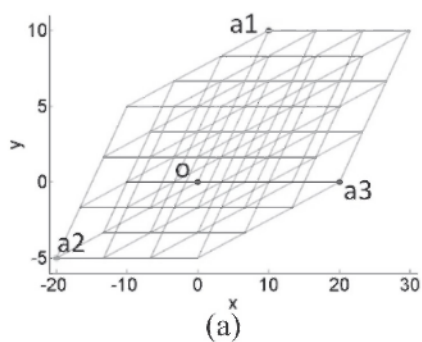


Рис. 8. Прямоугольная сетка: а) ортотрансформированная; б) перспективная (программные модели)

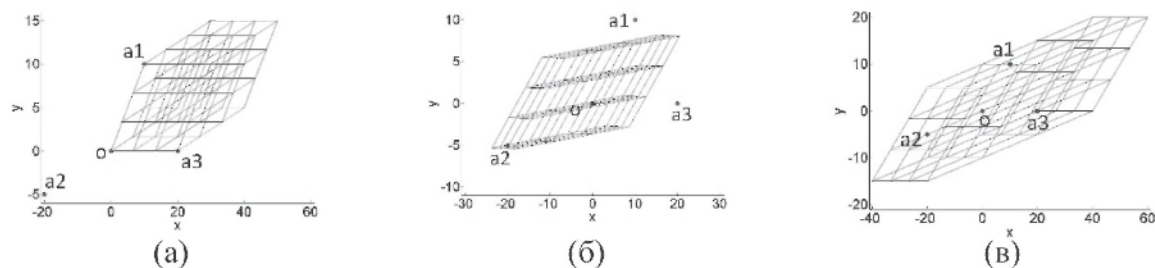


Рис. 9. Примеры преобразований движения координатной сетки: а) сдвиг; б) поворот; в) растяжение (программные модели)

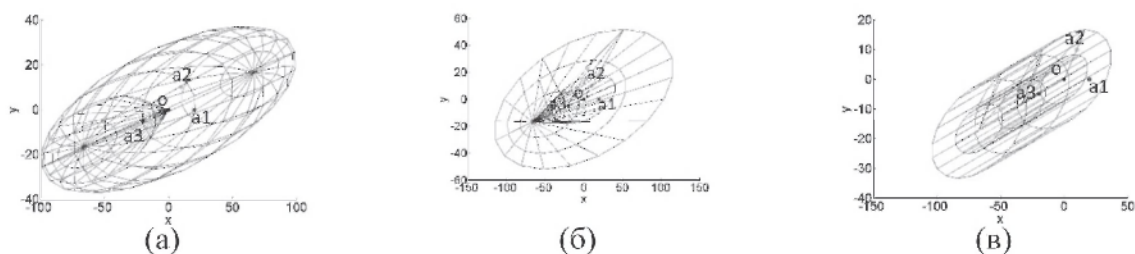


Рис. 10. Примеры нелинейных сеток: а) коническая; б) цилиндрическая; в) эллиптическая (программные модели)

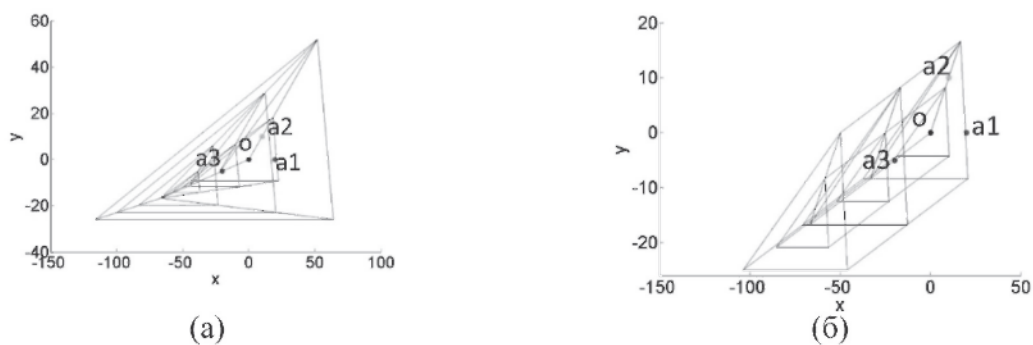


Рис. 11. Примеры линейных сеток: а) пирамидальная; б) призматическая

$$\rho(\bar{n}) = \frac{(kx + ly + m)^2}{k^2 + l^2} \rightarrow \min. \quad (18)$$

$\rho(\bar{n})$ – расстояние от точки P до прямой P_1P_2 , заданной уравнением $kx + ly + m = 0$ в СК wxy . $k = y_1 - y_2$, $l = x_2 - x_1$, $m = x_1y_2 - x_2y_1$. $p_1 = [x_1 \ y_1]^T = M\bar{n} + p_0$, $p_2 = [x_2 \ y_2]^T = M(\bar{n} + \Delta\bar{n}) + p_0$, $\bar{n} = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$, $\Delta\bar{n} = [\Delta n_1 \ \Delta n_2 \ \Delta n_3]^T$, $|\Delta\bar{n}| = 1$. p_1 и p_2 – координаты точек P_1 и P_2 в СК wxy , $\bar{n}$ и $\bar{n} + \Delta\bar{n}$ – в СК $OXYZ$ соответственно. Ребра P_1P_2 параллельны одной из осей, т.е. либо $\Delta n_1 = 1$, либо $\Delta n_2 = 1$, либо $\Delta n_3 = 1$. Для каждого из трёх $\Delta\bar{n}$ находим точку экстремума функции $\rho(\bar{n})$ (см. (18)). Т.е. для каждого ортогонального направления $\Delta\bar{n}$ получаем своё «оптимальное» ребро P_1P_2 (всего – три). Каждому из них соответствует своё минимальное ρ по формуле (18), минимальному из этих трёх ρ – искомое ребро P_1P_2 .

Координаты проекции $p' = (x, y)$ точки P на это ребро:

$$p' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l & k \\ k & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ky - lx \\ -m \end{bmatrix}, \quad (19)$$

II. Преобразование узловых координат в линейные.

Пересчёт координат точки P , установленной на прямоугольной сетке, из узловых в линейные выполняется согласно (14–15):

$$X_i = n_i h_i l_i, \quad h_i = \sqrt{d_{xi}^2 + d_{yi}^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (20)$$

где l_i – осевые коэффициенты по i -й оси, h_i – шаг сетки на i -й оси в пикселях (см. (15)).

Заметим, что преобразование (20) выполняется как для ортотрансформированной, так и для перспективной сетки. В обоих случаях h_i и l_i являются постоянными для выбранных опорных точек. В перспективной сетке вместо n_i используется n'_i по формуле (16). Тогда расстояние L в пространстве между любыми двумя точками P_1 и P_2 :

$$L = P_1P_2 = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}, \quad L_i = \Delta n_i h_i l_i, \quad \Delta n_i = |n_{2i} - n_{1i}|. \quad (20)$$

$$P_j : (X_{j1}, X_{j2}, X_{j3}), (n_{j1}, n_{j2}, n_{j3}).$$

III. Построение контура объекта на сетке.

При разметке точек объекта на сетке формируется матрица координат точек:

$$v = (v_1 \dots v_s), \quad v_j = (X_{1j} X_{2j} X_{3j})^T,$$

где v_j – координаты j -й точки P в составе контура объекта, s – число точек в модели, X_{ij} – i -я координата j -й точки в СК $OX_1X_2X_3$. В этой СК координаты v_j постоянны, но в СК wxy соответствующие координаты $\bar{p}_j = M\bar{n}_j + \bar{p}_0$ меняются в зависимости от изображений объекта, которым соответствуют разные образы сетки. Образ сетки задаётся: точкой $\bar{p}_0$ (сдвиг), осевыми коэффициентами l_i (поворот), шагами h_i (масштаб). Разметка точек

выполняется на разных образах, которым соответствуют различные видимые части объекта на изображениях.

При разметке линий объекта формируется матрица координат линий:

$$u = (u_1 \dots u_e), \quad u_j = (j_1 j_2)^T,$$

где u_k – координаты k -го отрезка $L_k = P_{k1}P_{k2}$ в составе контура объекта, e – число линий в модели.

Закраска элементов объекта. Закраска элементов объекта задаётся значениями яркостей, присваиваемых областям полигонов в составе контура.

Объект описывается множеством полигонов $V = \{V\}$. Каждый полигон U можно представить рядом точек $\{P_j\}$ в СК $OX_1X_2X_3$. Для конкретного образа в СК wxy координаты соответственно $\{p_j\}$. Закраска полигона в заданную текстуру T присвоение всем пикселям p , лежащим внутри полигона, цвета C текстуры, заданного законом распределения $C = f(e_1, e_2)$, где $e_1, e_2 \in [0, 1]$ – приведённые значения параметров распределения. Множество всех таких пикселей p находится по известному алгоритму «точка в полигоне» [19].

Частный случай: $C = \text{const}$ на каждом канале изображения (например, среднее значение по области U). Тогда при закраске каждому полигону U в составе V соответствует свой цвет C . Для разных образов сетки имеем разные образы полигонов. Невидимая часть объекта закрашивается в характерный цвет.

«Естественную» модель закраски можно получить, присвоив сторонам объекта (полигонам) соответствующие яркости на изображении. Т.к. полигон при этом задан в пространстве, данные цвета определены для любого образа объекта для любых ракурсов.

Пусть объект состоит из простейших полигонов $U = P_1P_2P_3$ треугольников с вершинами P_1, P_2, P_3 , имеющих узловые координаты $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$. Для некоторого образа сетки S данным точкам соответствуют точки $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ на исходном изображении J . Над S выполняется геометрическое преобразование, переводящее его в новую сетку S' . Тогда над точками $\bar{p}$ внутри полигона U изображения J выполняется преобразование, переводящее их в точки нового изображения J' :

$$\bar{p} = M\bar{n} + \bar{p}_0, \quad \bar{p}' = M'\bar{n} + \bar{p}'_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{p}'(\bar{p}) = K\bar{p} + Q, \quad \bar{p}'(\bar{p}') = K^{-1}(\bar{p}' - Q),$$

$$K = (M'W)(MW)^{-1}, \quad Q = K(M\bar{n}_0 + \bar{p}_0) + M'\bar{n}_0 + \bar{p}'_0,$$

Здесь $M, \bar{p}_0$ и $M', \bar{p}'_0$ – преобразования узловых координат в координаты изображений J и J' ; $\bar{n} = W\bar{t} + \bar{n}_0$ – уравнение плоскости полигона в СК $OX_1X_2X_3$, заданное параметрически: $W = (\bar{n}_2 - \bar{n}_1 \ \bar{n}_3 - \bar{n}_1)$, $\bar{t} = (t_1 \ t_2)^T$ – параметры. Преобразования подлежат точки $\bar{p}$, лежащие внутри полигона U (по алгоритму «точка в полигоне»). В процессе пространственных геометрических преобразований точки $\bar{p}$ внутри каждого полигона преобразуются в точки $\bar{p}'$. Значениям яркости $C = J'(p')$

пикселей p нового образа присваиваются значения яркостей прежнего образа: $C=J(g), g_x \in [1, s_x], g_y \in [1, s_y]; C=0, g_x \notin [1, s_x], g_y \notin [1, s_y]. g=(g_x, g_y)=p(p)$, $\square$ – извлечение целой части.

Обсуждение результатов

Данный метод применим: при построении 3D-моделей объектов, труднодоступных для контактных и дистанционных наблюдений; при работе с ограниченными данными (нет необходимости в наличии другой информации, кроме самого изображения): при работе с изображениями низкого качества (наличия дефектов или скрытых частей объекта). Метод является оперативным и «точечным», что позволяет его применить в военных целях и в области гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций [26–27].

К достоинствам метода относятся: малое количество необходимых исходных данных (достаточно одного изображения и нет необходимости в метаданных); работа с изображениями разных типов (космические или аэрофотоснимки, фотографии, картинки, микроскопические изображения и др.); простота использования (для построения 3D-модели достаточно разметить координатную сетку на объекте и выполнить на ней построения частей объекта).

Границы применимости метода: возможность ошибок построения 3D-модели, которые зависят от точности разметки точек и линий; строить 3D-модель можно только для объектов «правильной» формы, которые можно описать «правильными» геометрическими линиями (отрезками, дугами окружностей и эллипсов и др.), фигурами (квадрат, треугольник, окружность и т.д.) и телами (куб, пирамида, сфера и т.д.); оценка 3D-модели ограничена пространственным разрешением изображения; для того чтобы увидеть всю поверхность объекта, необходимо не менее двух его изображений, снятых с противоположных ракурсов.

Заключение

Разработан метод пространственных сеток, позволяющий построить 3D-модель ригидного объекта по одному изображению, в основе которого лежит привязка к изображению координатной сетки, точки которой определены в пространственной системе координат. Данный метод применим при низком качестве изображений. Исходными данными могут быть оптические изображения, как ортотрансформированные, так и перспективные. Причём чем лучше приближение к объекту, тем больше деталей можно увидеть и тем точнее может быть построена 3D-модель. Т.к. модель ригидного объекта строится интерактивно, её точность зависит от качества работы оператора и качества обработки изображения.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (уникальный идентификатор проекта RFMEFI58317X0061).

Литература

1. Мурынин, А. Б. Автоматическая система распознавания личности по стереоизображениям / А.Б. Мурынин // Изв. РАН. ТиСУ. – 1999. – № 1. – С. 106–114.
2. Матвеев, И. А. Идентификация объектов по стереоизображениям. Оптимизация алгоритмов восстановления поверхности / И.А. Матвеев, А.Б. Мурынин // Изв. РАН. ТиСУ. – 1998. – № 3. – С. 149–155.
3. Методы синтеза трехмерных моделей земной поверхности в инфракрасном диапазоне спектра / Г.Г. Себряков [и др.] // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2009. – № 10. – С. 12–20.
4. Мурынин, А. Б. Контроль качества пористых эластичных материалов методами технического зрения / А.Б. Мурынин, И.В. Сафонов, С.Ю. Яковлев // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 11. – С. 13–18.
5. Выголов, О. В. Mobile Robot Stereovision System For Real-Time Obstacle Detection / О.В. Выголов, С.Ю. Желтов, Ю.В. Визильтер // Мехатроника, управление и информатика. – 2011. – № 6. – С. 202–215.
6. Визильтер, Ю. В. Использование проективных морфологий в задачах обнаружения и идентификации объектов на изображениях / Ю.В. Визильтер, С.Ю. Желтов // Изв. РАН. ТиСУ. – 2009. – № 2. – С. 125–138.
7. Желтов, С. Ю. Обнаружение препятствий на пути следования мобильного робота на основе метода радиального ортотрансформирования / С.Ю. Желтов, О.В. Выголов // Изв. РАН. ТиСУ. – 2005. – № 5. – С. 146–158.
8. Мурынин, А. Б. Принципы построения системы стереоскопического зрения для управления движением робота / А.Б. Мурынин, И.А. Матвеев // Изв. РАН. ТиСУ. – 2003. – № 3. – С. 184–192.
9. Тужилкин, А. Ю. Модели и алгоритмы реконструкции трехмерных сцен на основе спутниковых изображений и априорной информации : дис. ... канд. тех. наук : 05.13.17 / А.Ю. Тужилкин. – ФГБОУВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых», 2016. – 141 с.
10. Суцевский, Д. В. Выявление и 3d визуализация искусственных объектов земной поверхности с использованием лидарных и оптических спутниковых изображений / Д.В. Суцевский // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 165–168.
11. Киричук, В. С. Двухпороговый алгоритм обнаружения точечных объектов по стереоизображениям / В.С. Киричук, А.К. Шакинов // Автотметрия. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 55–60.
12. Методика построения 3D-моделей ригидных объектов по одному изображению и ее применение в построении 3D-моделей антропогенных территорий по космическим изображениям / М.Л. Казарян [и др.] // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: сборник научных трудов / М.Л. Казарян [и др.]. – М.: Инфра-М; Znanium.com, 2018. – С. 121–125.
13. Пространственное моделирование реальных сцен и освещенности в программе 3ds-max в проектной деятельности школьников / М.Л. Казарян [и др.] // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

сборник научных трудов / М.Л. Казарян [и др.]. – М.: Инфра-М; Znanium.com, 2018. – С. 110–114.

14. Попело, В. Д. Автоматизированная корреляционная процедура выбора соответственных точек на цифровых изображениях в стереопаре / В.Д. Попело, М.В. Ванеева // Модели и технологии природообустройства (региональный аспект). – 2015. – Т. 1. – С. 52–54.

15. Панин, С. В. Метод определения характеристических точек изображения в системах стереозрения / С.В. Панин, В.О. Чемезов, П.С. Любутич // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2016. – Т. 59, № 3. – С. 224–230.

16. Бобир, Н. Я. Фотограмметрия / Н.Я. Бобир, А.Н. Лобанов, Г.Д. Федорук. – М.: «Недра», 1974. – 472 с.

17. Shape-from-shading: a survey / R. Zhang [et al.] // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1999. – Vol. 8, No. 21. – P. 690–706.

18. Horn, B. K. P. Shape from shading / B.K.P. Horn. – Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1989. – P. 123–171.

19. Лурье, И. К. Геоинформационное картографирование. Методы геоинформатики и цифровой обработки космических снимков : учебник / И.К. Лурье. – М.: КДУ, 2008. – 424 с.

20. Shufelt, J.A. Exploiting photogrammetric method for building extraction in aerial images / J.A. Shufelt // International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing. – 1996. – Vol. 31, Part B6. – P. 74–79.

21. Extracting Buildings from Aerial Images using Hierarchical Aggregation in 2D and 3D / A. Ficher [et al.] // Computer vision and image understanding. – 1998. – Vol. 72, No. 2. – P. 185–203.

22. Dave, C. P. A survey on Geometry Correction of Satellite Imagery / C.P. Dave, R. Joshi, S.S. Srivastava // International Journal of Computer Applications. – 2015. – Vol. 116, No. 12. – P. 24–27.

23. Haala, N. An update on automatic 3D building reconstruction / N. Haala, M. Kada // ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing. – 2010. – Vol. 65, No. 6. – P. 570–580.

24. Канатников, А. Н. Аналитическая геометрия / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. – М.: «МГТУ им. Н. Э. Баумана», 2000. – 338 с.

25. Рихтер, А. А. Метод построения 3D-модели объектов поверхности земли по одному космическому изображению и его применение в задаче космического мониторинга объектов захоронения отходов / А.А. Рихтер, А.Б. Мурынин, В.Ю. Игнатьев // Материалы 14-й Всерос. откр. ежегод. конф.: Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. Методы и алгоритмы обработки спутниковых данных (ИКИ РАН-2016, 14–18 ноября). – М.: ИКИ РАН, 2016. – С.44.

26. Построение 3D-моделей ригидных объектов по косвенным изображениям методом координатных сеток / А.А. Рихтер [и др.] / М.А. Шахрамьян, М.Л. Казарян, А.А. Рихтер // Информация и Космос. – 2018. – № 2. – С. 104–110.

27. Pattern recognition algorithm using descriptors combined radio and visible spectra / A.A. Rihter [et al.] // Proc. SPIE 10221, Mobile Multimedia/Image Processing, Security, and Applications 2017, 1022107 (23 May 2017); doi: 10.1117/12.2262875.