

Математические методы исследования жизненных циклов программно-аппаратных многофункциональных комплексов в инфокоммуникационных системах

Mathematical methods for study of life cycles of software and hardware multi-purpose complexes in information and communications systems

Лихачев / Likhachev A.

Александр Михайлович

(lih_2000@mail.ru)

доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ,
заслуженный изобретатель РФ,
действительный член Международной
Академии Связи.

АО «Научно-исследовательский институт «Рубин»,
советник генерального директора.

г. Санкт-Петербург

Присяжнюк / Prisyazhnuik A.

Андрей Сергеевич

(pas@itain.spb.ru)

кандидат технических наук.

ЗАО «Институт телекоммуникаций»,
исполнительный директор.

г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: жизненный цикл – life cycle; программно-аппаратный многофункциональный комплекс – software and hardware multi-purpose complex; инфокоммуникационная система – information and communications system; моделирование процессов эксплуатации – simulation of operational processes.

Предложены математические методы для исследования жизненного цикла многофункциональных программно-аппаратных комплексов инфокоммуникационных систем на основе обобщения решения задачи о разделе ставки в теории вероятностей, полученного Б. Паскалем, П. Ферма, Н. Тарталья и др., построена схема усеченных биномиальных испытаний, позволяющая моделировать дискретно-непрерывные, детерминировано-случайные процессы, в том числе и эксплуатации программно-аппаратных комплексов. Показана их практическая реализуемость для определения состояния цифровых устройств, цифровых систем передачи и их элементов, защищенная патентами Российской Федерации на способы и устройства.

The article offers mathematical methods for study of life cycles of software and hardware multi-purpose complexes in information and communications systems based on the generalization of solution of the rate division problem in the probability theory obtained by B. Pascal, P. Fermat, N. Tartaglia et al., scheme of censored binomial trials was constructed which allows to simulate discrete-continuous, deterministic random processes including operation of software and hardware complexes. Their practical feasibility for determination of digital devices condition, digital communication systems and its elements protected by method and device patents of the Russian Federation is shown.

Анализ тенденций развития инфокоммуникационных систем (ИКС) показывает, что в настоящее время интенсивно развиваются управляемые системы с динамически изменяемыми когнитивными структурами, реконфигурация которых зависит от параметров потоков входных заявок на информационные и телекоммуникационные услуги (ИТУ) и внутреннего состояния программно-аппаратных комплексов (ПАК), образующих ИКС и представляющих объекты управления для их автоматизированных систем управления (АСУ) [1–7]. Для того чтобы обеспечить качественное управление жизненным циклом ПАК в таких системах необходимо иметь информацию об их состоянии, которое определяется как внутренней структурой объекта управления и величиной воздействий, поступающих на его вход, так и областью допустимых стратегий поведения в пространстве возможных состояний, обеспечивающих отказоустойчивое функционирование на всем жизненном цикле ПАК при эволюционном развитии ИКС [2, 6]. Высокие требования к точности и надежности реализации функций управления жизненным циклом ПАК в ИКС со случайными изменениями структуры и возможной размерности пространства состояний, в том числе по причине отказов и восстановлений элементов ПАК, делает проблематичным использование вероятностных моделей изменений состояний таких систем на основе известных функций распределения [9–11], так как возникают смещения их параметров за счет наличия изменяющейся во времени детерминированной составляющей. Так, при исследовании процесса восстановления заданных состояний ПАК на различных стадиях жизненного цикла на базе модели среднего времени восстановления, [2, 5, 8–11] оказывается, что при моделировании учитываются веро-

ятности нахождения отказавшего ПАК в работоспособном состоянии, а это приводит к получению оптимистических, заниженных значений оценок свойств моделируемого объекта, что существенно усложняет ресурсное обеспечение ПАК в составе ИКС.

Данное положение может привести к нежелательным решениям АСУ [2, 6, 7] на изменение структуры ИКС, с точки зрения отказоустойчивости и надежности, из-за разброса случайных параметров относительно их среднего значения, смещённости распределений, существенно отличающихся от гауссовских белых шумов, которые на практике оказываются цветными и со смещённым математическим ожиданием [9].

Для моделирования процессов эксплуатации и восстановления на различных стадиях жизненного цикла ПАК [6] в АСУ ИКС [7] необходимо знание вектора возможных их состояний и допустимых колебаний последних. В [8–11] особое место отводится использованию аддитивных или мультипликативных моделей для исследования свойств таких систем, в основе которых лежат схемы независимых испытаний, адекватно отображающих физическую суть многих случайных явлений. В аксиоматике вероятностных пространств под испытанием понимается некоторое конечное вероятностное пространство [9, 10] состояний ПАК в ИКС. Это означает, что для построения вероятностно-детерминированных моделей состояний ПАК ИКС на любых стадиях жизненного цикла, являющихся многофункциональными и многорежимными технологическими системами, важное значение имеет нахождение функций распределения $F_i(\xi_i) = 1$, $i=(1,...,n)$, входящих в формулу полной вероятности, построенную на разбиении конечного вероятностного пространства состояний ПАК ИКС:

$$F(\xi) = a_1 F_1(\xi_1) + a_2 F_2(\xi_2) + ... + a_n F_n(\xi_n), \quad (1)$$

где $a_i > 0$, $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $F_i(\xi_i)$ – дискретные функции распределения случайных величин ξ_i , $i=(1,...,n)$.

Применение схемы независимых испытаний в данном случае можно интерпретировать, при произвольном законе распределения, как расположение на прямой в точках $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$ точечных масс $p_1, p_2, ..., p_n$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Тогда, математическое ожидание случайной величины ξ : $M\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$, – есть центр тяжести, а ее дисперсия $D\xi = \sum_{i=1}^n p_i (\alpha_i - M\xi)^2$ – момент инерции масс p_i относительно центра тяжести. Во многих практических случаях для решения приведенной задачи применяют биномиальное распределение. Однако использование последнего, хотя и дает возможность определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ , но не позволяет описать движение масс p_i в конечном вероятностном пространстве. Особенно это проявляется при наличии детерминированных состав-

ляющих [8–12]. Так, в структуре сигналов, обеспечивающих перенос коммутируемых информационных единиц (КИЕ) через ИКС, может присутствовать постоянная составляющая единичных посылок для синхронизации, передачи сигнально-управляющих КИЕ и т.д., наличие которых не учитывается в биномиальном распределении [2, 13–18].

Поэтому возникла проблема исследования математического аппарата, используемого при анализе свойств и задании требований по отказоустойчивости и надёжности на элементы ИКС, и их совокупность, входящих в многорежимные, многофункциональные ПАК, на основе исследования парадокса раздела ставки в теории вероятностей [12].

В [12] показано, что важное значение для развития теорий вероятностей, математической статистики и случайных процессов, являющихся базовыми при построении математических моделей стохастических динамических систем управления, имеет разрешение парадоксов, то есть нахождение объяснений неожиданным, противоречащим «здравому смыслу» выводам и утверждениям. К одному из таких парадоксов относится парадокс о разделе ставки.

Впервые данная задача была опубликована в 1494 году [12] Фра Лука Пачоли в книге «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности». Задача формулируется следующим образом: два игрока играют в безобидную игру (то есть у обоих шансы победить одинаковы), и они договорились, что тот, кто первым выиграет 6 партий, получит приз. Предположим, что на самом деле игра остановилась до того, как один игрок выиграл приз (например, первый игрок выиграл 5 партий, а второй – 3). Как справедливо разделить приз? В [12] указывается, что неверные противоречивые ответы создали легенду о парадоксе. Согласно предложению Ф. Л. Пачоли, приз следовало разделить пропорционально выигранным партиям, то есть 5:3. Н. Тарталья предложил его делить в отношении 2:1 (исходя из того, что первый игрок выиграл на две партии больше). В [12] считается, что данные предложения неверны, а верным является решение задачи, сформулированное независимо друг от друга Б. Паскалем и П. Ферма в 1654 году, согласно которому справедливым является раздел 7:1. Следуя их идее, необходимо фиктивно продолжить игру тремя партиями, даже если некоторые из них окажутся лишними (то есть даже когда один из игроков уже выиграл приз) при условии равновероятности восьми исходов игры. В этих условиях, поскольку второй игрок получит приз только в одном случае, то справедливым является соотношение 7:1. Б. Паскаль и П. Ферма получили и общее выражение для оценки вероятности $P(A)$ события A , состоящего в оценке шансов первого игрока получить приз:

$$P(A) = 2^{-n-m+1} \sum_{j=n}^{n+m-1} \left(\frac{n+m-1}{j} \right), \quad (2)$$

Z=20 Y=5 K=0,4

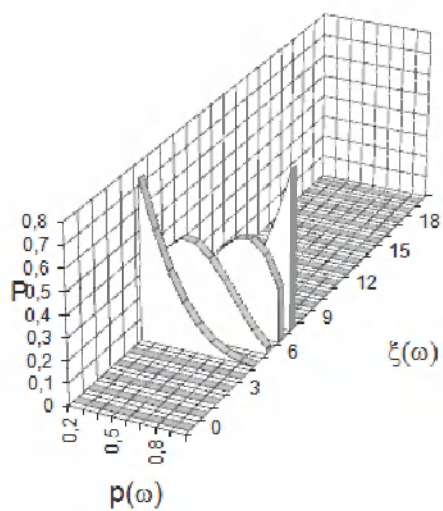


Рис. 1

Z=20 Y=5 K=0,6

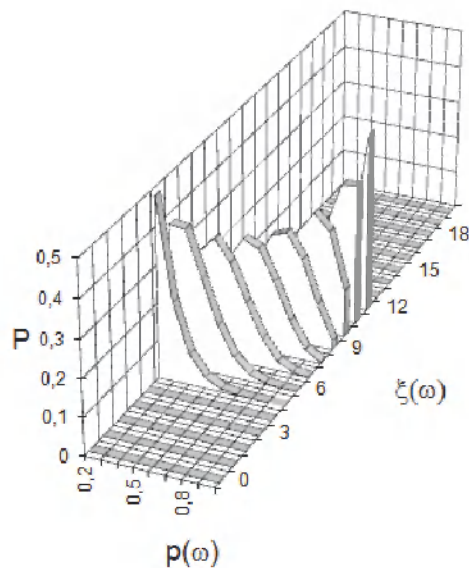


Рис. 2

Z=20 Y=5 K=0,8

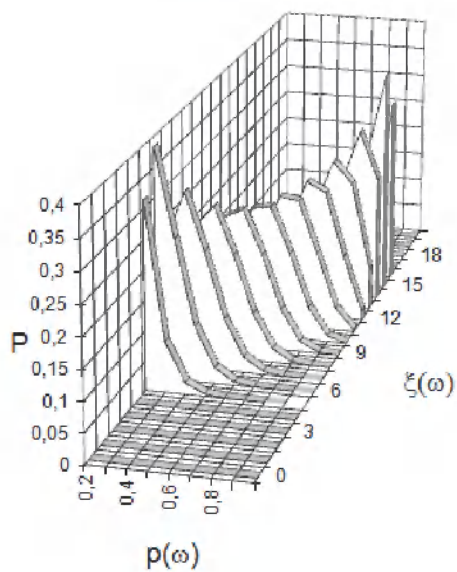


Рис. 3

Z=20 Y=5 K=1

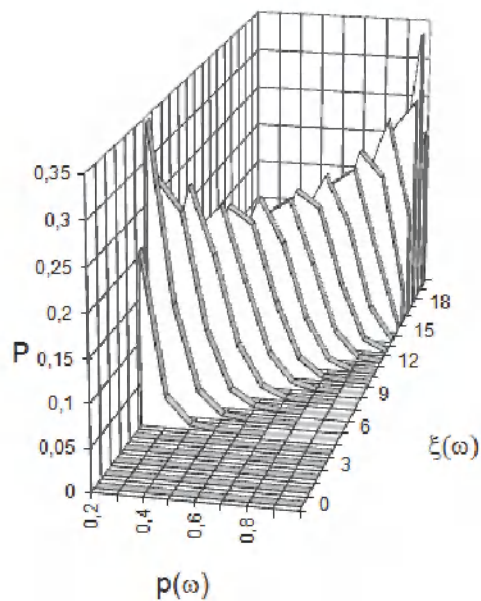


Рис. 4

Z=20 Y=0 K=0,1

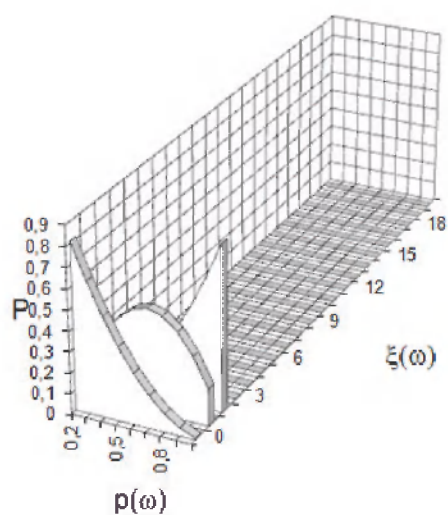


Рис. 5

Z=20 Y=0 K=0,4

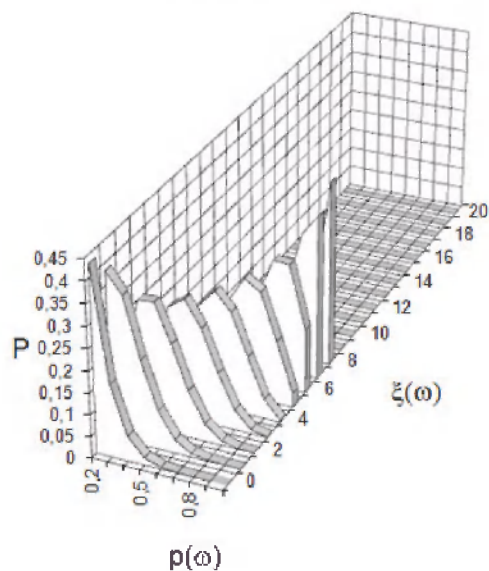


Рис. 6

Z=20 Y=0 K=0,8

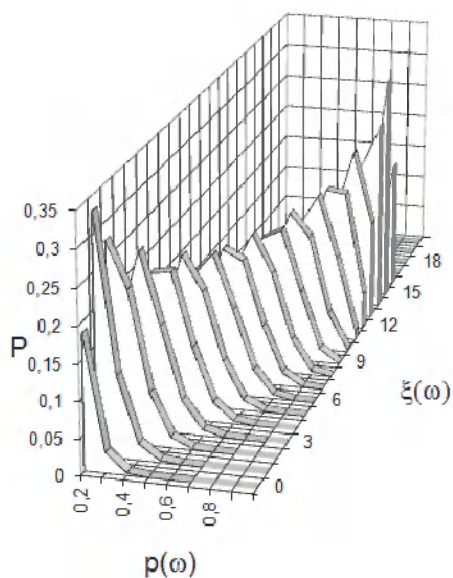


Рис. 7

Z=20 Y=0 K=1

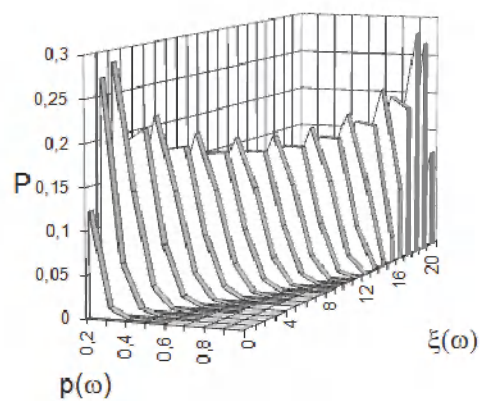


Рис. 8

где n – количество партий, которые требуется выиграть первому игроку для получения приза; m – количество партий, которые требуется выиграть второму игроку для получения приза.

Проанализируем условия задачи и ее соответствие выражению (2). Из условия задачи следует, что игроки играют в безобидную игру, то есть у игроков одинаковые шансы выиграть игру, но они могут произвольно выбирать тактику борьбы. Таким образом, если второй игрок в первых восьми партиях сэкономил силы, изматывая соперника, то вероятность его выигрыша в каждой из последующих партий будет больше 0.5, а для первого игрока меньше 0.5. Анализ условий задачи показал, что применительно к первому игроку полная группа событий может быть описана усеченной функцией биномиального распределения [8,...,11]:

$$\sum_{j=y}^z \left(\frac{z-y}{j-y} \right) p^{j-y} (1-p)^{z-j} = 1, \quad (3)$$

где p – вероятность успеха первого игрока в каждой из фиктивных партий; y – количество партий, выигранных первым игроком; $z = y + n + m - 1$, где n и m имеют тот же смысл, что и в выражении (2).

Из выражения (3) следует, что вероятность успеха первого игрока в фиктивных $n + m - 1$ партиях может быть найдена следующим образом, при $n = 1, m = 3, y = 5$:

$$P(A) = \sum_{j=6}^8 \left(\frac{2}{j-5} \right) p^{j-5} (1-p)^{8-j} \quad (4)$$

и при $p = 0.5$ получим, что $P(A) = 0.875$, а $1 - P(A) = 0.125$ и соотношение раздела ставки равно 7:1, то есть соответствует решению Б. Паскал и П. Ферма. Однако из выражения (4) очевидна зависимость $P(A)$ от p . Следовательно, если менять значение p , то можно найти условия при которых были правы и Ф. Пачоли и Н. Тарталья.

В более общем случае установлено, что функция распределения усеченного биномиального распределения в схеме независимых испытаний имеет следующий вид (при ограниченной области допустимых стратегий поведения динамической системы в пространстве возможных состояний ПАК ИКС [8–11]):

$$\begin{cases} 0, & i < y, \\ P(y \leq \xi(\omega) \leq [kz]) = \sum_{i=y}^{[kz]} \left(\frac{[kz]-y}{i-y} \right) p^{i-y} (\omega) (1-p(\omega))^{[kz]-i} = 1, \\ 0, & i > [kz], \end{cases} \quad (5)$$

где $p(\omega)$ – вероятность успеха в каждом испытании, для каждого элементарного события $\omega \in \Omega$, Ω – пространство элементарных событий; $\xi(\omega)$ – возможная кратность элементарных событий в каждом испытании;

$0 < k < 1$ – коэффициент, характеризующий возможную кратность событий в каждом испытании (ограничивающий область допустимых стратегий); $y = 0, 1, 2, \dots$, $[kz] - 1$ – минимальная величина $\xi(\omega)$ в каждом испытании; $]\dots[$ – антье, округление до большего целого.

Для иллюстрации зависимостей вероятностей возникновения событий $P(\xi(\omega)) = P$ различной кратности $\xi(\omega)$ в каждом испытании на рис. 1,...,8. представлены “полигоны” [9, 10] усеченных биномиальных распределений [2, 5]. Из рисунков следует, что данные характеристики существенным образом зависят от параметров $k, y, z, p(\omega)$ и их изменений, которые в общем случае могут носить как случайный, так и детерминированный характер. Важное значение при использовании функций распределения случайных величин имеет умение определять их числовые характеристики.

Пусть в схеме обобщенных независимых испытаний вероятность P числа успехов на конечном вероятностном пространстве определяется с помощью элементарных вероятностей $p(\omega)$. Тогда случайная величина является дискретной, имеет решетчатое распределение, а математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\xi(\omega)$, обозначаемые соответственно $M\xi$ и $D\xi$, находятся на основе следующей теоремы [9, 10].

Теорема. Если случайная величина $\xi(\omega)$ имеет усеченное биномиальное распределение, определяемое выражением (5), то ее математическое ожидание $M\xi$ и дисперсия $D\xi$ находятся с помощью формул:

$$\begin{aligned} M\xi &= ([kz]-y)p(\omega) + y, \\ D\xi &= ([kz]-y)p(\omega)(1-p(\omega)). \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Известно, что математическое ожидание любой дискретной величины определяется как сумма $M\xi = \sum_{i=1}^{[kz]} \xi_i(\omega) p_i(\omega)$, тогда его значение для выражения (5) примет вид:

$$M\xi = \sum_{i=y}^{[kz]} i \left(\frac{[kz]-y}{i-y} \right) p^{i-y}(\omega) (1-p(\omega))^{[kz]-i}. \quad (7)$$

Положим, что $(1-p(\omega)) = q(\omega)$, $[kz] = n+y$, $i = j+y$. Тогда правая часть (7) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+y} (j+y) \left(\frac{n}{j} \right) p^j(\omega) q^{n-j}(\omega) &= \sum_{j=0}^n (j+y) \left(\frac{n}{j} \right) p^j(\omega) q^{n-j}(\omega) + \\ &+ \sum_{j=n+1}^{n+y} (j+y) \left(\frac{n}{j} \right) p^j(\omega) q^{n-j}(\omega) = y + \sum_{j=0}^n i \left(\frac{n}{j} \right) p^j(\omega) q^{n-j}(\omega) + \\ &+ \sum_{j=n+1}^{n+y} (j+y) \left(\frac{n}{j} \right) p^j(\omega) q^{n-j}(\omega) = \\ &= y + np(\omega) + \sum_{j=n+1}^{n+y} (j+y) \left(\frac{n}{j} \right) p^j(\omega) q^{n-j}(\omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Произведем в (8) обратную замену переменных.

Тогда $\sum_{i=[kz]+1}^{[kz]} i \left(\frac{[kz]-y}{i-y} \right) p^{i-y}(\omega) q^{[kz]-i}(\omega) = 0$ по определению из (5), а выражение (7) примет вид $M\xi = ([kz]-y)p(\omega) + y$.

В соответствии со свойствами дисперсии $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$. Тогда ее нахождение связано с определением второго начального момента $\xi(\omega)$. Произведем замену переменных и получим [9, 10, 11]

$$\begin{aligned} D\xi &= \sum_{j=0}^{n+y} (j+y)^2 \binom{n}{j} p^j(\omega) q^{n-j}(\omega) - (y+np(\omega))^2 = \\ &= \sum_{j=0}^n (j^2 + 2 \cdot y \cdot j + y^2) \binom{n}{j} p^j(\omega) q^{n-j}(\omega) - (y+np(\omega))^2 + \\ &+ \sum_{j=n+1}^{n+y} (j+y)^2 \binom{n}{j} p^j(\omega) q^{n-j}(\omega). \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая, что $\sum_{j=n+1}^{n+y} (j+y)^2 \binom{n}{j} p^j(\omega) q^{n-j}(\omega)$ по определению (5) после подстановки переменных равна 0, выражение (9) примет вид:

$$\begin{aligned} D\xi &= y^2 + 2ynp(\omega) + \left(\sum_{j=0}^n j^2 \binom{n}{j} p^j(\omega) q^{n-j}(\omega) - \right. \\ &\quad \left. - (np(\omega))^2 \right) - y^2 - 2ynp(\omega) = \\ &= np(\omega)q(\omega) = (kz[-y]p(\omega)(1-p(\omega))). \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема доказана.

На рис. 9–16 приведены примеры изменения $M\xi$ и $D\xi$ от параметров усеченного биномиального распределения для конечного вероятностного пространства мощностью $Z = 20$ [5, 9, 10].

Анализ приведенных зависимостей показывает, что первый начальный момент и второй центральный моменты распределения (5) существенным образом зависят от параметров усечения k и y , что может быть использовано при исследовании характеристик поведения и идентификации состояния ПАК ИКС, вероятностная модель состояний которых определяется выражением (1).

Отметим, что при $k = 1, y = 0$ выражения (5) и (6) будут соответствовать функции биномиального распределения. В большом количестве прикладных задач возникает необходимость оценки смещенности и асимметрии распределения. Для их вывода воспользуемся известным подходом.

Вывод выражений для третьего и четвертого центральных моментов осуществляется аналогично выводу выражений (6). По определению центральный момент s -го порядка [9, 10]:

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{kz} (\xi_i - M\xi)^s p_i(\omega). \quad (11)$$

Отсюда несложно получить соответствующие выражения для третьего и четвертого моментов [9, 10]:

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{kz} (\xi_i - M\xi)^3 p_i(\omega) = M\xi^3 - 3M\xi M\xi^2 + 2(M\xi)^3, \quad (12)$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{kz} (\xi_i - M\xi)^4 p_i(\omega) = M\xi^4 - 4M\xi M\xi^3 + 6(M\xi)^2 M\xi^2 - 3(M\xi)^4. \quad (13)$$

Для получения искомых выражений необходимо найти 3-й и 4-й начальные моменты

$$M\xi^3 = \sum_{i=1}^{kz} i^3 \binom{kz[-y]}{i-y} p^{i-y}(\omega) (1-p(\omega))^{kz[-i]}, \quad (14)$$

$$M\xi^4 = \sum_{i=1}^{kz} i^4 \binom{kz[-y]}{i-y} p^{i-y}(\omega) (1-p(\omega))^{kz[-i]}. \quad (15)$$

Произведя замену переменных в (14) и (15) ($n = kz[-y]$) и осуществив несложные преобразования, получим выражения для 3-го и 4-го начальных моментов:

$$\begin{aligned} M\xi^3 &= \sum_{i=1}^{n+y} i^3 \binom{n}{i-y} p^{i-y}(\omega) (1-p(\omega))^{n+y-i} = \\ &= y^3 + 3p^2(\omega)n^2(y+1) - \\ &- 3p^2(\omega)n(y+1) + (3y^2 + 3y+1)np(\omega) + \\ &+ p^3(\omega)n^3 - 3p^3(\omega)n^2 + 2p^3(\omega)n, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} M\xi^4 &= \sum_{i=1}^{n+y} i^4 \binom{n}{i-y} p^{i-y}(\omega) (1-p(\omega))^{n+y-i} = \\ &= p^4(\omega)n^4 - 6p^4(\omega)n^3 + 11p^4(\omega)n^2 - \\ &- 6p^4(\omega)n + 6p^3(\omega)n^3 - 18p^3(\omega)n^2 + \\ &+ 12p^3(\omega)n - 7p^2(\omega)n + 7p^2(\omega)n + p(\omega)n. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив (6), (16), (17) в (12) и (13), а затем выполнив операции по упрощению, получим соответствующие выражения:

$$\mu_3 = np(2p^2 - 3p + 1), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= y^4 + p^4(\omega)n^4 - 6p^4(\omega)n^3 + 11p^4(\omega)n^2 - 6p^4(\omega)n + \\ &+ (4y+6)p^3(\omega)n^3 - (12y+18)p^3(\omega)n^2 + (8y+12)p^3(\omega)n + \\ &+ (12y+6y^2+7)p^2(\omega)n(n-1) + (6y^2+4y+4y^3+1)p(\omega)n. \end{aligned} \quad (19)$$

Выполнив обратную замену переменных в (18) и (19), получим выражения для 3-го и 4-го центральных моментов:

$$\mu_3 = (kz[-y]p(2p^2 - 3p + 1)), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= y^4 + p^4(\omega)(kz[-y])^4 - 6p^4(\omega)(kz[-y])^3 + \\ &+ 11p^4(\omega)(kz[-y])^2 - 6p^4(\omega)(kz[-y]) + \\ &+ (4y+6)p^3(\omega)(kz[-y])^3 - (12y+18)p^3(\omega) \times \\ &\times (kz[-y])^2 + (8y+12)p^3(\omega)(kz[-y]) + \\ &+ (12y+6y^2+7)p^2(\omega)(kz[-y]) \times ((kz[-y]) - 1) + \\ &+ (6y^2+4y+4y^3+1)p(\omega)(kz[-y]). \end{aligned} \quad (21)$$

На практике важное значение при исследовании случайных явлений имеют коэффициенты асимметрии

$z=20 \quad k=1$

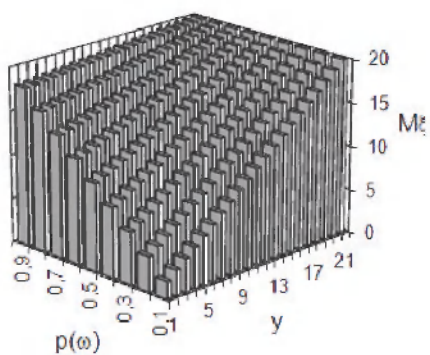


Рис. 9

$z=20 \quad k=0.7$

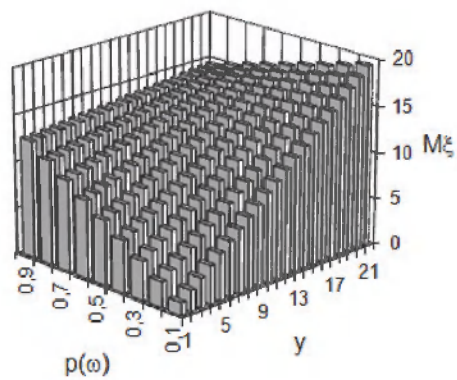


Рис. 10

$z=20 \quad k=0.5$

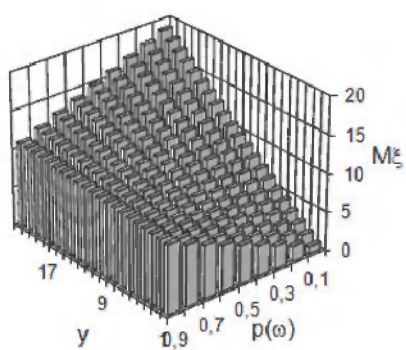


Рис. 11

$z=20 \quad k=0.3$

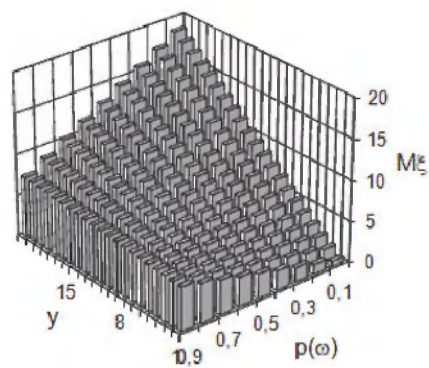


Рис. 12

$z=20 \quad k=1$

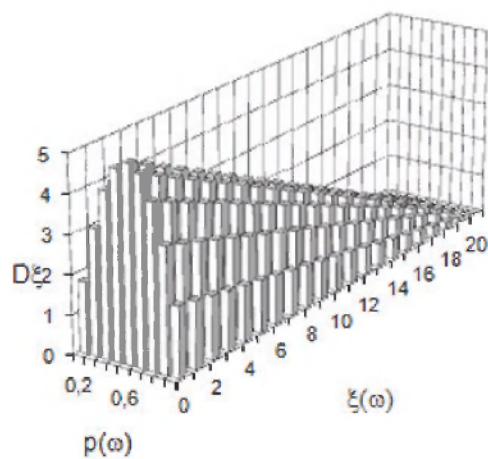


Рис. 13

$z=20 \quad k=0,7$

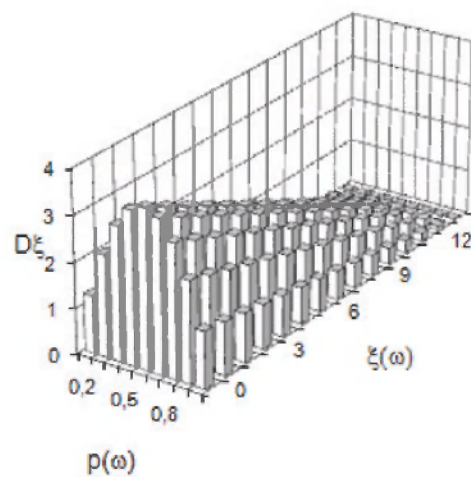


Рис. 14

$z=20 \quad k=0,5$

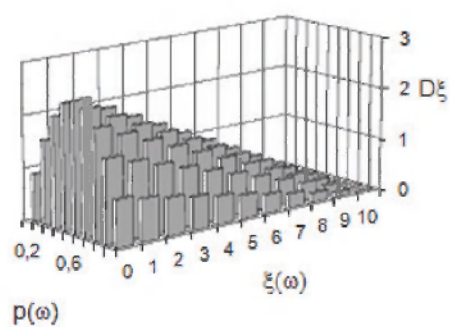


Рис. 15

$z=20 \quad k=0,3$

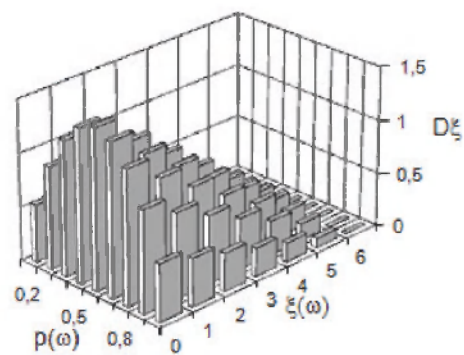


Рис. 16

M_3 и эксцесса M_4 усеченного биномиального распределения, которые могут быть получены в результате несложных математических преобразований [9–11]:

$$M_3 = \frac{(1-2p(\omega))}{\sqrt{(kz-y)(p(\omega)-p^2(\omega))}}, \quad (22)$$

$$M_4 = \frac{(kz-y)(3p^2(\omega)(1-p(\omega))^2(kz-y-2)+(12y^2-1)p^2(\omega)+p(\omega))-3}{(kz-y)^2 p^2(\omega)(1-p(\omega))^2} - 3. \quad (23)$$

На рис. 17–20 приведены примеры иллюстрации изменения этих коэффициентов от параметров усеченного биномиального распределения.

Анализ рисунков 9–20 показывает, что изменение числовых характеристик усеченного биномиального распределения может быть использовано для описания вектора состояний ПАК ИКС и их элементов, обладающих управляемой переменной структурой [2, 5, 13–18].

На практике, одной из областей возможного применения приведенных характеристик является решение задач устойчивой идентификации состояния таких систем, в том числе при фиксированных, перемежающихся отказах их элементов и при возникновении периодических сбоев. Для этого в ходе их функционирования (либо прогона специальных тестовых последовательностей) [2, 5, 6, 13–18] отслеживаются изменения оценок математического ожидания и дисперсии случайной величины $\xi_i(\omega)$ и $p(\omega)$ статистическими методами [8, ..., 11]:

$$\hat{M}\xi = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega), \hat{D}\xi = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\xi_i(\omega) - \hat{M}\xi)^2, \hat{p}(\omega) = \frac{1}{n \cdot z} \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega), \quad (24)$$

где z – мощность векторного пространства состояний; n – количество циклов измерений, обеспечивающих заданную достоверность определения $\hat{M}\xi, \hat{D}\xi, \hat{p}(\omega); \xi_i(\omega)$ – кратность элементарных событий ω в i -ом испытании $i = (1..n)$ [8–11]. Тогда на основе решения системы уравнений относительно неизвестных параметров $\hat{k}$ и $\hat{y}$, построенной с использованием выражений (6) и оценок (24),

$$\begin{cases} \hat{M}\xi = (\hat{k}z - \hat{y}) \cdot \hat{p}(\omega) + \hat{y} \\ \hat{D}\xi = (\hat{k}z - \hat{y}) \cdot \hat{p}(\omega) \cdot (1 - \hat{p}(\omega)) \end{cases} \quad (25)$$

методом подстановки получим следующие выражения [5, 9–11]:

$$\begin{cases} \hat{k} = (\hat{M}\xi + \hat{D}\xi / \hat{p}(\omega)) / z \\ \hat{y} = \hat{M}\xi - \hat{D}\xi / (1 - \hat{p}(\omega)) \end{cases} \quad (26)$$

Увеличение $\hat{y}$ будет свидетельствовать о возрастании постоянной величины количества непрерывно используемых элементов в ПАК ИКС с управляемой структурой (или о возникновении отказов), а уменьшение $\hat{k}$ будет характеризовать уменьшение количества используемых элементов (а также наличие отказов). Тогда при известных входных воздействиях, определяющих требуемое значение y_0 и k_0 на интервале оценки числовых характеристик, отклонения y и k от y_0 и k_0 будут свидетельствовать о возникновении отказов элементов ПАК ИКС или периодических сбоях в ее работе. В частном случае, при $y_0 = 0$ и $k_0 = 1$, можно определить кратность возникших сбоев или отказов:

$$L = y + (1-k)z \quad (27)$$

Пример. Рассмотрим пятиразрядный двоичный счетчик, действие которого описывает биномиальное распределение, что соответствует начальным условиям усечения $y_0=0, k_0=1, z=5, \xi_i(\omega)=(0,...,5)$ и физической $\xi_i(\omega)=N_i$, где N_i – число измеренных единиц в полном цикле работы данного цифрового устройства (ЦУ).

Тогда при его исправности, $M\xi = 2.5, D\xi = 1.25, p(\omega) = 0.5$. Пусть в результате измерений получено $\hat{M}\xi = 3, \hat{D}\xi = 1.25, \hat{p}(\omega) = 0.5$, то есть произошло изменение технического состояния ЦУ. На основе выражений (26) найдем параметры усечения: $\hat{y}=1, \hat{k}=1$, что свидетельствует о кратности отказа, рассчитанной по (27), $L=1$ и его характере – появлении либо фиксированного сигнала “1” на одном из выходов счетчика, либо перемежающегося отказа в виде скользящей “1” на одном из выходов счетчика, либо о появлении периодического сбоя. Если же в результате измерений: $\hat{M}\xi = 2, \hat{D}\xi = 1, \hat{p}(\omega) = 0.5, y=0, k=0.8, L=1$, то проявление аналогичных отказов заключается в наличии сигнала “0”. В ситуации когда $\hat{M}\xi = 2.5, \hat{D}\xi = 0.75, \hat{p}(\omega) = 0.5, \hat{y}=1, \hat{k}=0.8, L=2$, что свидетельствует о кратном отказе двоичного пятиразрядного счетчика, который характеризуется одновременным присутствием одного сигнала “1” и одного сигнала “0”. Таким образом, выражения (26) и (27) позволяют идентифицировать технические состояния ЦУ, входящих в состав элементов ПАК ИКС, реализующих полную группу векторов разрядностью z за n испытаний. Однако имеется ряд образцов радиотехнических устройств ПАК ИКС, у которых в рабочем режиме имеются номинальные параметры усечения y_0 и k_0 , заключающиеся в запрете определенных комбинаций $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_z)$ (например, длинных серий сигналов “1” и “0”), тогда на первом этапе определяют числовые характеристики $M\xi, D\xi$, и вероятность появления сигнала “1” $p_0(\omega)$ в исправном состоянии и находят на основе выражений (26) начальные параметры усечения y_0 и k_0 . В этом случае характер неисправностей определяется на основе измерения разностей $(\hat{y}-y_0)$ и $(\hat{k}-k_0)$, а кратность отказов находится из выражений [9–11]:

$$L = \begin{cases} y_0 - \hat{y} + (1 - (k_0 - \hat{k})) \cdot z, & \text{при } \hat{y} > y_0, \hat{k} < k_0; \\ ((y_0 - \hat{y}) + (1 - (k_0 - \hat{k})) \cdot z) / 2, & \text{при } \hat{y} < y_0, \hat{k} < k_0; \\ ((\hat{y} - y_0) + (1 - (\hat{k} - k_0)) \cdot z) / 2, & \text{при } \hat{y} > y_0, \hat{k} > k_0. \end{cases} \quad (28)$$

$$\dots \left(1 - \frac{d-1}{[kn]}\right) (1-p)^{[kn]-d}. \quad (30)$$

Если учесть, что при $[kn] \rightarrow \infty$, $[kn]p \rightarrow a$, предел $(1-p)^{[kn]}$ равен $\exp(-a)$, то проведя переобозначения $m = d+y$, при $([kn]-y) \rightarrow \infty$, получим

$$P(\xi = m) = \frac{([kn]p)^{(m-y)}}{(m-y)!} \exp(-[kn]p) = \frac{\tilde{a}^{(m-y)}}{(m-y)!} \exp(-a). \quad (31)$$

Однако вызывает интерес нахождение «а», $M\xi$ в условиях рассматриваемой теоремы.

Известно, что вероятность возникновения любого события $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ в системе событий из n , представляющих конечное разбиение, равна (при $k < 0,9$):

$$p(\xi_j) = \frac{\sum_{j=1}^{[kn]} \frac{1}{[kn]-j+1}}{\sum_{j=1}^{[kn]} \frac{1}{[kn]}} = \frac{\sum_{j=1}^{[kn]} \frac{([kn]-1)([kn]-2)\dots([kn]-j+1)}{(j-1)!}}{\sum_{j=1}^{[kn]} \frac{([kn]([kn]-1)([kn]-2)\dots([kn]-j+1))}{j!}} = \frac{1}{[kn]} \frac{\sum_{j=1}^{[kn]} \frac{1}{(j-1)!}}{\sum_{j=1}^{[kn]} \frac{1}{j!}}. \quad (32)$$

Если $n \rightarrow \infty$ и $[kn] \rightarrow \infty$, то существует такое конечное вероятностное пространство мощностью $[kn]$, для которого

$$p = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ [kn] \rightarrow \infty}} p(\xi_j) \approx \frac{1}{[kn]}. \quad (33)$$

Поскольку числовые характеристики при асимптотическом приближении должны быть равны, то с учетом (33):

$$M\xi = ([kn]-y)p + y = \left(1 - \frac{y}{[kn]}\right) + y, \quad (34)$$

дисперсия $D\xi$

$$D\xi = ([kn]-y)p(1-p) = \left(1 - \frac{y}{[kn]}\right) \left(\frac{[kn]-1}{[kn]}\right) \approx \left(1 - \frac{y}{[kn]}\right). \quad (35)$$

Из выражений (33) и (34) следует, что при больших $[kn]$ и малых p математическое ожидание числа успехов в (29) $M\xi = a+y$, $a = 1-yp$, то есть приближается к параметру «у» усеченного биномиального распределения. Причем $D\xi \approx a$ при большом значении $[kn]$ и является смещенной относительно дисперсии усеченного биномиального распределения на величину $([kn]-1)/[kn]$.

Таким образом, выражения (24–28), полученные на основе применения усеченных биномиальных распределений, дают возможность идентифицировать состояние ПАК ИКС и их элементов (в том числе больших интегральных микросхем применяемых в радиотехнических системах и устройствах ПАК ИКС) [13–18].

Поскольку схема обобщенных независимых испытаний, построенная на усеченных биномиальных распределениях, может служить вероятностной моделью многих реальных случайных явлений, многофункциональных ПАК ИКС с динамически управляемыми структурами, $F_i(\xi_i)$ в пространстве состояний (1) могут иметь непрерывные функции распределения [9, 10], то значительный интерес представляет задача о нахождении асимптотических формул, позволяющих приближенно вычислить точечные и интервальные значения вероятностей числа успехов ξ при n -независимых испытаниях, больших и малых значениях параметров данной функции распределения. Особый интерес для решения данной задачи представляет применение распределения Пуассона [8–10].

Рассмотрим случай больших $[kn]$ и малых $p(\omega) - p$, $\omega \in \Omega$, где $0 < k \leq 1$ – коэффициент, характеризующий возможную кратность элементарных событий ω из пространства элементарных событий Ω мощностью n ; $p(\omega)$ – вероятность успеха в каждом испытании, для каждого элементарного события ω .

Для получения асимптотических формул воспользуемся методологией, изложенной в [10, 11] для доказательства предельных теорем асимптотического приближения биномиального распределения [8, ..., 11].

Теорема 1.

Если верхний предел усеченного биномиального распределения $[kn] \rightarrow \infty$, разность между верхним и нижним пределом y : $([kn] - y) \rightarrow \infty$ так, что математическое ожидание случайной величины $p \rightarrow 0$, усеченного биномиального распределения $M\xi = [kn]p + y(1-p) \rightarrow a + y$, $0 < a < 1$, то для любого фиксированного $m = (y+i)$, $i=0,1,\dots, [kn]$ [9–11]

$$p(\xi = m) = C_{[kn]-y}^{m-y} p^{m-y} (1-p)^{[kn]-m} \rightarrow \frac{\tilde{a}^{(m-y)}}{(m-y)!} \exp(-a). \quad (29)$$

Доказательство. Обозначим $d = (m-y)$, тогда утверждение (29) сразу вытекает из равенства [10]:

$$P(\xi = d+y) = \frac{([kn]p)^d}{d!} \left(1 - \frac{1}{[kn]}\right) \left(1 - \frac{2}{[kn]}\right) \dots$$

$Z=20 \quad K=1$

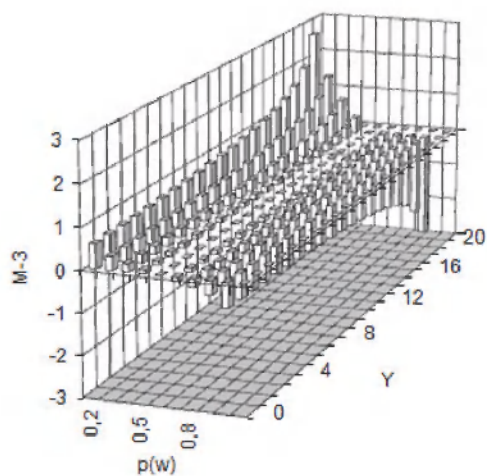


Рис. 17

$Z=20 \quad K=0,5$

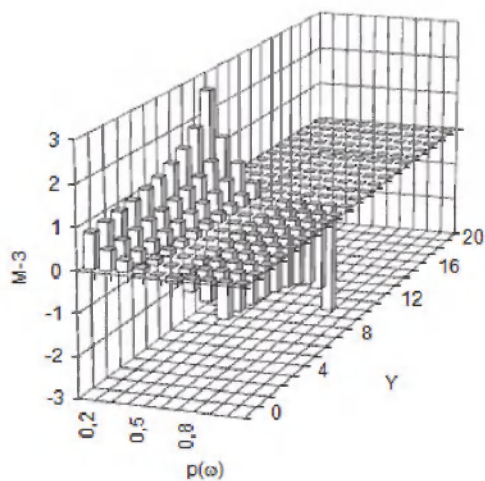


Рис. 18

$Z=20 \quad K=1$

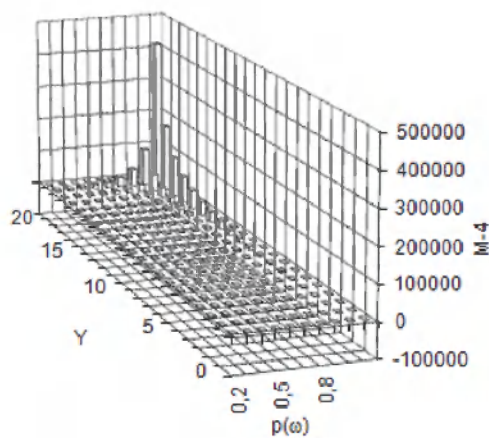


Рис. 19

$Z=20 \quad K=0,5$

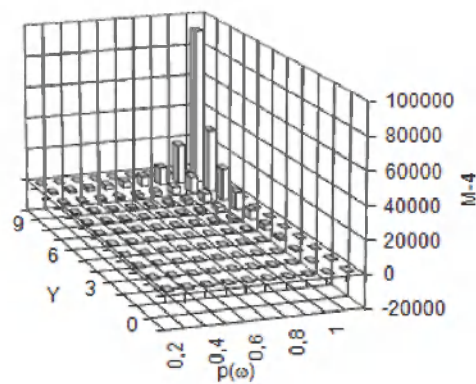


Рис. 20

Важное значение для практического использования распределения имеет случай, когда $y = 0$, что соответствует возможности асимптотического приближения усеченного биномиального распределения распределением Пуассона, так как в этом случае усеченное биномиальное распределение вырождается в биномиальное распределение.

Следствие. Теорема 2.

Если в теореме 1 при $]kn[\rightarrow \infty, p \rightarrow 1/]kn[, y = 0$, то $a = 1, D\xi = 1$, а при $p \rightarrow 0, y = 0$, получим $a = 0, D\xi = 0$. Доказательство. Утверждения следуют из (34) и (35):

$$\begin{aligned} \text{При } p = \frac{1}{]kn[}, y = 0, \\ a = M\xi = (]kn[+0) \cdot \frac{1}{]kn[} + 0 = 1, D\xi = 1 - \frac{0}{]kn[} = 1. \\ \text{При } p \rightarrow 0, y = 0, a = M\xi = (]kn[+0) \cdot 0 + 0 = 0, \\ D\xi = (]kn[-0) \cdot 0 \cdot (1-0) = 0 \end{aligned}$$

Теоремы 1, 2 доказаны.

Рассмотрим более общий случай, когда вероятностное пространство (1) конечно.

Теорема 3.

Если система равновероятностных событий $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ представляет конечное вероятностное пространство, $k \rightarrow 1/n, p \rightarrow 1/n, y = 0$ или $y = 1$, то при $y = 1, a = 1, D\xi = 0$, при $y = 0, a = M\xi = 1/n, D\xi \approx 1/n$.

Доказательство. Теорема 3 сразу вытекает из (34) и (35), а также следующего равенства:

$$p = P(\xi_j) = \frac{\sum_{j=1}^{]kn[} C_{n-1}^{j-1}}{\sum_{j=1}^{]kn[} j} = \frac{1}{n}, \text{ при } k = 1/n. \quad (36)$$

Из теоремы 3 следует, что теорема Пуассона для биномиального распределения действует при $M\xi = D\xi = a = 1/n$, что в ряде случаев может быть использовано для нахождения полной группы событий, то есть мощности пространства элементарных событий Ω .

Теорема 4.

Если система равновероятностных событий $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ представляет конечное разбиение, и $p \rightarrow k$ так, что $(]kn[-y)p + y \rightarrow y$, то для любых $m = (y+i), i=0,1,2,\dots$ будет выполняться условие (29) и

$$\sum_{m=y}^{]kn[} \frac{a^{(m-y)}}{(m-y)!} \exp(-a) \rightarrow 1, \text{ при } n-y \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Доказательство. Рассмотрим предел суммы числового ряда (37):

$$\lim_{(n-y) \rightarrow \infty} \sum_{m=y}^{]kn[} \frac{a^{(m-y)}}{(m-y)!} \exp(-a). \quad (38)$$

Положим $d = m-y$. Тогда выражение (38) примет вид:

$$\begin{aligned} \lim_{(n-y) \rightarrow \infty} \sum_{d=0}^{]kn[-y]} \frac{a^d}{d!} \exp(-a) = \\ = \exp(-a) \sum_{d=0}^{\infty} \frac{a^d}{d!} = \exp(-a) \exp(a) = 1. \end{aligned} \quad (39)$$

В выражении $p(\xi = m) = C_{]kn[-y}^{m-y} p^{m-y} (1-p)^{]kn[-m}$ при $(n-y) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty,]kn[-y \rightarrow \infty$, так как k и y конечные целые числа, положим, что $]kn[-y = z + y, m = j + y$, тогда $zp = a$, а $p = a/z$. Поэтому, переходя к пределу вида

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} C_z^j \left(\frac{a}{z} \right)^j \left(1 - \left(\frac{a}{z} \right) \right)^{z-j} = \frac{a^j}{j!} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{z} \right)^z = \\ = \frac{a^j}{j!} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{z} \right)^z = \frac{a^j}{j!} \exp(-a), \end{aligned} \quad (40)$$

произведем замену переменных в (40) и получим:

$$P(\xi = m) = \frac{((]kn[-y) \cdot p)^{m-y}}{(m-y)!} \cdot \exp(-(]kn[-y) \cdot p). \quad (41)$$

Найдем $M\xi$ и $D\xi$ для выражения (41)

$$M\xi = \sum_{i=y}^{\infty} i \cdot \frac{a^{(i-y)}}{(i-y)!} \exp(-a). \quad (42)$$

Положим, что $i-y = d$. Тогда (42) примет вид:

$$\begin{aligned} M\xi = \sum_{d=0}^{\infty} (d+y) \frac{a^d}{d!} \exp(-a) = \\ = \sum_{d=0}^{\infty} d \frac{a^d}{d!} \exp(-a) + y \cdot \sum_{d=0}^{\infty} \frac{a^d}{d!} \exp(-a) = a + y \end{aligned} \quad (43)$$

или

$$M\xi = (]kn[-y) \cdot p + y. \quad (44)$$

Для нахождения $D\xi$ воспользуемся свойствами дисперсии:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \quad (45)$$

Действуя по аналогии с выводами (43) найдем в результате несложных преобразований второй начальный момент:

$$M\xi^2 = a^2 + a + 2ay + y^2. \quad (46)$$

Переходя к (45) с учетом (43) и (46):

$$D\xi = a^2 + a + 2ay + y^2 - a^2 - 2ay - y^2 = a$$

или $D\xi = (]kn[-y)p$. Теорема доказана, следовательно:

$$M\xi = (a+y) = (]kn[-y)p + y \text{ и } D\xi = a.$$

Другой важный случай представляет возможность асимптотического приближения усеченных биномиальных распределений нормальным распределением. Особый интерес для конечных вероятностных пространств представляет применение локальной теоремы Муавра-Лапласа [11] при « p » не близких к 0 или 1 [8-11].

Теорема 5.

Если в схеме независимых испытаний, построенной на усеченных биномиальных распределениях, $\sigma = \sqrt{(]kn[-y) \cdot p(\omega)(1-p(\omega))} \rightarrow \infty$, то для любого фиксированного $c > 0$ равномерно по всем $|x| < c$ вида

$$x = \frac{m - (]kn[-y)p(\omega) - y}{\sigma},$$

где m -целые неотрицательные числа

$$i=0,1,\dots,]kn[-1, 0 < k < 1$$

$$P\left\{\frac{m - (]kn[-y)p(\omega) - y}{\sqrt{(]kn[-y)p(\omega)(1-p(\omega))}} = x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)(1+O(1)). \quad (47)$$

Доказательство. Пусть $m = (]kn[-y)p(\omega) + y + x\sigma$. Произведем оценку логарифма вероятности

$$P(\xi = m) = P\left\{\frac{m - (]kn[-y)p(\omega) - y}{\sigma} = x\right\} = \frac{(]kn[-y)!}{(m-y)!(]kn[-m)!} p^{m-y}(\omega)(1-p(\omega))^{]kn[-m}, \quad (48)$$

определяемого при $]kn[-y = b$, $m-y = a$, $p(\omega) = p$, $1-p(\omega) = q$, следующим образом:

$$\log P(\xi = m) = \log b! - \log a! - \log (b-a)! + a \log p + (b-a) \log q.$$

Применим асимптотическую формулу Стирлинга [10] при $b \rightarrow \infty$

$$\log b! = b \cdot \log b + \log(2\pi b)^{1/2} - b + O_b, \quad (49)$$

где $O_b = O(1/b)$.

Обозначим $z = b-a = bq-x\sigma$. Из условия теоремы следует, что $a = m-y = bp(1+xq/\sigma) \rightarrow \infty$, $z = bq(1-xp/\sigma) \rightarrow \infty$, поэтому можно применить формулу (49) для оценки $\log b!$, $\log a!$, $\log z!$:

$$\begin{aligned} \log P(\xi = m) &= b \cdot \log b - a \cdot \log a - \\ &- z \cdot \log z + a \cdot \log p + z \cdot \log q + 0.5 \cdot \log(b/2\pi\sigma) + \\ &+ O_b - O_a - O_z \end{aligned} \quad (50)$$

Учитывая [10], что

$$\begin{aligned} \log(b/\sigma) &= 2 \cdot \log(1/\sigma) + O(1/\sigma), \\ 1/n &= O(1/\sigma^2), \\ 1/a &= 1/(b(1+xq/\sigma)) = O(1/\sigma^2), \quad 1/z = O(1/\sigma^2), \\ \log(1+\varepsilon) &= O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

из (50) получим:

$$\log P(\xi = m) = -a \cdot \log \frac{a}{bp} - z \cdot \log \frac{z}{bq} + \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad (51)$$

Из (51) следует:

$$\begin{aligned} \log P(\xi = m) &= -((]kn[-y)p + y - y + x\sigma) \cdot \\ &\cdot \log\left(1 + \frac{xq}{\sigma}\right) - ((]kn[-y)q - x\sigma) \times \\ &\times \log\left(1 - \frac{xp}{\sigma}\right) + \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \\ &= \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - ((]kn[-y)p + x\sigma) \times \\ &\times \left(\frac{xq}{\sigma} - \frac{x^2 q^2}{2\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right)\right) - ((]kn[-y)q - x\sigma) \cdot \\ &\cdot \left(-\frac{xp}{\sigma} - \frac{x^2 p^2}{2\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (52)$$

Последнее доказывает асимптотическую формулу (47).

Замечание: Теорему 5 нельзя применять, если $D\xi < 1$ и $\xi - (]kn[-y)p - y < D\xi$.

Другой важный случай связан с возможностью приближенного вычисления вероятностей $P(m_1 < \xi < m_2)$. Можно по аналогии с интегральной предельной теоремой Муавра - Лапласа [11] сформулировать следующую теорему [8-10].

Теорема 6. Интегральная предельная теорема асимптотического приближения усеченного биномиального распределения нормальным распределением.

При $\sigma = \sqrt{(]kn[-y)p(\omega)(1-p(\omega))} \rightarrow \infty$ равномерно по $-\infty < a < b < \infty$

$$\begin{aligned} P\left\{a \leq \frac{\xi - (]kn[-y)p(\omega) - y}{\sqrt{(]kn[-y)p(\omega)(1-p(\omega))}} \leq b\right\} - \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Доказательство. Положим, что $|a| < c$, $|b| < c$, $p(\omega) = p$, $(1-p(\omega)) = q$.

Пусть

$$n_1 = \lfloor \lfloor kn[-y] \rfloor p + y + a \cdot \sqrt{\lfloor kn[-y] \rfloor pq} \rfloor,$$

$$n_2 = \lfloor \lfloor kn[-y] \rfloor p + y + b \cdot \sqrt{\lfloor kn[-y] \rfloor pq} \rfloor,$$

где $\lfloor x \rfloor$ – такое наименьшее целое число, что $x < \lfloor x \rfloor$, а $\lceil x \rceil$ – такое наибольшее целое число, что $\lceil x \rceil < x$.

Тогда,

$$P\left\{a \leq \frac{\xi - \lfloor kn[-y] \rfloor p(\omega) - y}{\sqrt{\lfloor kn[-y] \rfloor p(\omega)(1-p(\omega))}} \leq b\right\} = \sum_{m=m_1}^{m_2} P(\xi = m). \quad (54)$$

Введем обозначение:

$$m = \lfloor kn[-y] \rfloor p + y + x_m \sqrt{\lfloor kn[-y] \rfloor pq},$$

поэтому

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = 1/\sigma.$$

По теореме 5 представим (54) в виде

$$P\left\{a < \frac{\xi - \lfloor kn[-y] \rfloor p - y}{\sqrt{\lfloor kn[-y] \rfloor pq}} < b\right\} =$$

$$= \sum_{m=n_1}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right) \Delta x_m \left(1 + O\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right). \quad (55)$$

В выражении (55) стоит интегральная сумма, сходящаяся равномерно по a и b [11] при $\sigma \rightarrow \infty$ к интегралу $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$, поэтому получаем утверждение (53) при $|a| < c$, $|b| < c$.

Докажем более общий случай. Для этого обозначим

$$\mu_n = \frac{\xi - \lfloor kn[-y] \rfloor p - y}{\sigma} \text{ и получим}$$

$$P((\mu_n > c) = 1 - P((\mu_n < c)). \quad (56)$$

Как известно из анализа, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1$, поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^c \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c > x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \quad (57)$$

Следовательно, из (56) и (57) получаем

$$\left(P((\mu_n > c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c > x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) =$$

$$= \left(P((\mu_n \leq c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^c \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right). \quad (58)$$

Положим, что $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое “ c ”, при котором

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{x|c>x\}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx < \frac{\varepsilon}{8}. \quad (59)$$

Зафиксируем данное значение “ c ”. Исходя из доказанного найдется такое n_1 , что для всех $\lfloor kn[-y] \rfloor > n_1$ справедливо

$$\left(P((\mu_n \leq c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^c \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) < \frac{\varepsilon}{8},$$

откуда, учитывая (58) и (59), для тех же $\lfloor kn[-y] \rfloor > n_1$ имеем

$$P((\mu_n > c) \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (60)$$

Возьмем любой интервал $[a, b]$ и обозначим $[A, B] = [a, b] \cap [-c, c]$.

Так как $-c < A < B < c$, то, как было доказано выше, существует значение n_2 , обеспечивающее для всех $\lfloor kn[-y] \rfloor > n_2$ выполнение следующего неравенства:

$$\left(P(\mu_n \in [A, B]) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (61)$$

Тогда из неравенства

$$\left(P(\mu_n \in [a, b]) - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) \right) \leq$$

$$\leq P((\mu_n > c) + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{x|c>x\}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) +$$

$$+ \left(P(\mu_n \in [A, B]) - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) \right)$$

получаем, в силу (59), ..., (61), что при $\lfloor kn[-y] \rfloor > n_0 = \max(n_1, n_2)$

$$\left(P(\mu_n \in [a, b]) - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) \right) < \varepsilon \quad (62)$$

и равномерно по всем $a < b$. Теорема доказана.

Предельные теоремы 1–6 могут применяться для приближенного вычисления вероятностей $P(\xi=m)$ и $P(m_1 < \xi < m_2)$ в схеме независимых испытаний (1), построенных на основе усеченных биномиальных распределений при больших $\lfloor kn[-y] \rfloor$. При этом теорема 3 применима только при $p < 1$ и $np < 1$, что подтверждает правильность выводов сделанных в [8].

Разработанные математические модели, построенные на усеченных биномиальных распределениях, для описания векторного пространства состояний ПАК ИКС с переменной во времени структурой, а также полученные асимптотические приближения, для вычисления точечных и интервальных значений вероятностных характеристик пространства состояний

ПАК при управлении их жизненным циклом в ИКС [6, 7], открывают дополнительные возможности для исследования свойств multifunctionальных и много-режимных систем с переменной структурой, построения системы моделей для решения широкого круга организационно-технических задач в АСУ ИКС.

Выводы

Создание перспективных ПАК требует обобщения опыта разработки, производства и управления жизненным циклом предшествующих поколений этих систем в ходе эволюционного развития ИКС с целью повышения качества предоставляемых ИТУ услуг для обеспечения требуемого их уровня в интересах управления страной, поддержания обороноспособности, функционирования экономики (в том числе при чрезвычайных ситуациях), удовлетворения возрастающих потребностей в информационном обмене абонентов (пользователей) различных категорий и приоритетов.

Проведенный анализ информационных потоков различных видов, классов (приоритетов), которые могут циркулировать в перспективных информационных сетях с разными методами коммутации и маршрутизации, показал необходимость взаимоувязанного развития процессов интеграции различных служб связи посредством управления жизненным циклом ПАК в АСУ ИКС с целью дезинтеграции управления разными видами трафика как административного, так и оперативного (в том числе по причине персонализации обслуживания конкретных абонентов).

Проведенный анализ методов и способов моделирования процессов управления жизненным циклом ПАК для обеспечения надёжности и отказоустойчивости ИКС позволил разработать математический аппарат для организации процесса их восстановления при различных отказах и повреждениях ПАК на разных стадиях жизненного цикла, взаимоувязанный с качеством предоставления сетевых ресурсов потребителям различных классов и тенденциями развития технологий административного и оперативного управления телекоммуникационными сетями в соответствии с концепцией развития ОАЦСС ВС РФ.

Вскрытые недостатки в моделировании организации процесса управления жизненным циклом ПАК в АСУ телекоммуникационных сетей, обусловленные отставанием научной проработки проблемы обеспечения отказоустойчивости и надёжности автоматизированных сетей связи от революционно развивающихся информационных сетей в направлении построения ИКС, включающих как стационарные, так и мобильные компоненты, требуют поиска путей снижения финансовых и материальных эксплуатационных расходов на реализацию комплекса взаимоувязанных мероприятий на организационном, технологическом и техническом уровнях управления качеством жизненного цикла ПАК, в том числе целесообразной

организацией процессов оперативного, оперативно-технического и технического восстановления их состояний в различных условиях применения по назначению в составе ИКС.

Исследование жизненного цикла ПАК в разных условиях (в том числе чрезвычайных) в составе ИКС, принципов их функционирования, позволило классифицировать данные системы как системы большой сложности с ведущим принципом поведения – рефлексией. При этом система показателей и критериев, характеризующих эффективность их функционирования, должна отражать потребность их изучения на качественном уровне самоорганизации с концепцией рационального поведения адаптивизацией. Это позволит в качестве основного критерия эффективности обеспечения надёжности и отказоустойчивости ИКС выбрать переключающийся критерий, обеспечивающий требуемый уровень качественного состояния на различных стадиях жизненного цикла ПАК в ИКС при минимальных издержках на решение этой задачи.

Литература

1. Исследование и комплексное построение базовых подсистем электросвязи / А.М. Лихачев [и др.] – СПб.: «ГОУ "Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте"», 2007. – 253 с.
2. Лихачев, А. М. Методология проектных исследований и управление качеством сложных технических систем электросвязи / А.М. Лихачев, В.И. Курносков. – СПб.: «Тирекс», 1998. – 496 с.
3. Инфокоммуникационные сети: архитектура, технологии, стандартизация / А.М. Лихачев [и др.] – М.: «Радио и связь», 2004. – 208 с.
4. Телекоммуникации. Толковый словарь основных терминов и сокращений / В.Е. Кузнецов [и др.]; под ред. А.М. Лихачева, С.П. Присяжнюка. – СПб.: АИН РФ Институт телекоммуникаций, 2001. – 799 с.
5. Оценка эффективности алгоритмических процедур диагностирования сетей связи при различных ошибках диагностических решений / А.М. Лихачев [и др.] // Сборник научных трудов ВЦ РАН «Вопросы теории безопасности и устойчивости систем». Выпуск 2. – ВЦ РАН, 2000. – 14 с.
6. Лихачев, А. М. Концептуальные основы создания и развития автоматизированной системы управления ОАЦСС ВС РФ / А.М. Лихачев, А.С. Присяжнюк, А.В. Абрамович // Информация и Космос. – 2016. – № 2. – С. 6–21.
7. Лихачев, А. М. Автоматизированная система управления связью Вооружённых Сил Российской Федерации и приоритетные направления её развития / А.М. Лихачев, Х.А. Арсланов, А.С. Башкирцев // Связь в Вооружённых Силах Российской Федерации. – 2016. – С. 17–20.
8. Сифоров, В. И. О методах расчета надёжности работы систем, содержащих большое число элементов / В.И. Сифоров // Радиотехника. – 1995. – № 4–5. – С. 147–156.
9. Надёжность и эффективность в технике: Справочник. В 10 т. / Ред. совет: В.С. Авдеевский (пред.), В.И. Кузнецов,

Н.Д. Кузнецов и др. – М.: Машиностроение, 1988.

10. Севастьянов, Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики / Б.А. Севастьянов. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

11. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1982. – 255 с.

12. Секей, Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике : [пер. с англ.] / Г. Секей – М.: Мир, 1990. – 280 с.

13. Пат. 2120656 Российская Федерация, МПК G05B23/00, H05K13/08. Способ определения состояния цифровых устройств / С.В. Гребнев [и др.]; патентообладатель Военная академия связи. – опубл. 20.10.1998.

14. Пат. 2234811 Российская Федерация, МПК H04L12/44. Способ формирования и восстановления сети синхронизации сети связи / Э.В. Беляков [и др.]; патентообладатель Военный университет связи. – опубл. 20.08.2004.

15. Пат. 2233039 Российская Федерация, МПК H04J3/00, H04L12/00, H04L7/00. Способ синхронизации сети связи / Э.В. Беляков [и др.]; патентообладатель Военный университет связи. – опубл. 20.07.2004.

16. Пат. 2253941 Российская Федерация, МПК H03F3/60. Малошумящий усилитель сверхвысоких частот / В.Е. Кузнецов [и др.]; патентообладатель Военный университет связи. – опубл. 10.06.2005.

17. Пат. 2132594 Российская Федерация, МПК H04B3/46, H04B17/00. Способ и устройство диагностики состояния аппаратуры цифровых систем передачи / Е.В. Гречишников [и др.]; патентообладатель Военная академия связи. – опубл. 27.06.1999.

18. Кейджан, Г. А. Прогнозирование надежности микроэлектронной аппаратуры на основе БИС / Г.А. Кейджан. – М.: Радио и связь, 1987. – 127 с.