Модель процесса автоматизированной обработки телеметрической информации ракет-носителей и разгонных блоков

Process model for carrier rocket and upper stage telemetry data automated processing

Скороходов / Skorokhodov Y.
Ярослав Анатольевич
(yaroslavskor@gmail.com)
ФГКВОУ ВО «Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского» МО РФ,
адъюнкт.
г. Санкт-Петербург

Ключевые слова: характеристики «превышений уровней» – characteristics of the «exceedances above the given levels»; неоднородность – nonhomogeneity; обработка информации – data processing; выбросы траекторий случайных процессов – random processes trajectories emissions; классификация случайных процессов – random processes classification.

Рассматривается модель процесса автоматизированной обработки телеметрической информации (ТМИ) со структурно-временной неоднородностью. Статистический анализ ТМИ космических средств позволил выявить структурно-временную неоднородность, которая проявляется как нелинейные преобразования телеметрируемых параметров (ТМП). В работе предлагается использовать в качестве информативных признаков нелинейных преобразований ТМП характеристики выбросов траекторий случайных процессов. Определены критерий разделимости процессов первого класса и признаковое пространство, образованное статистиками выбросов, при которых процессы с заданными законами распределений являются максимально разделимыми.

The article presents model for automated processing of telemetry information (TMI) with structure-time nonhomogeneity. Statistical analysis of space vehicles TMI has highlighted structure-time nonhomogeneity which shows itself as nonlinear transformations of telemetered parameters (TMP). This study offers to use characteristics of random process trajectory emissions as features of TMP nonlinear transformations. First class processes separability criterion and feature space formed by emissions statistics where by processes with specified distribution laws are maximum separable are determined.

Введение

В настоящее время разрабатываются комплексы автоматизированной обработки ТМИ ракет-носителей (РН) и разгонных блоков (РБ), предназначенные для оперативного получения заключений о контролируемых событиях, происходящих на борту, и визуализации полученных результатов на средствах отображения информации наземного испытательного комплекса космодрома [6]. Практика обработки телеметрической информации (ТМИ) РН и РБ показывает, что не выполняются требования по обеспечению заданного уровня достоверности принятия решения о техническом состоянии (ТС) бортовых систем при использовании результатов первичной обработки ТМИ в качестве исходной информации для формализованных методов анализа ТС и оценивания летно-технических характеристик космических средств [4]. В основном, это связано с «неоднородностью» [10] и трудностью формализации обработки ТМИ РН и РБ.

Результаты статистического анализа ТМИ РН и РБ выявили нелинейные преобразования ТМП, которые связаны с нештатным поведением объекта контроля. Это позволяет использовать оценки характеристик нелинейных преобразований ТМП для фиксации факта и времени нарушения штатного поведения контролируемых систем. Анализ методов обработки неоднородной информации позволил сделать вывод, что основные их недостатки связаны с существенными ограничениями, накладываемыми на класс случайных процессов, или с большим объемом вычислений, что не позволяет их использовать в комплексах мониторинга ТС РН и РБ. В данной статье предлагается модель процесса автоматизированной обработки ТМИ РН и РБ на основе теории выбросов траекторий случайных процессов.

Модель телеметрической информации со структурно-временной неоднородностью

На основе результатов исследования вероятностных характеристик ТМИ РН (в том числе в нештатных и аварийных ситуациях) с целью систематизации особенностей ТМИ определено понятие «неоднородность ТМИ» и предложена классификация неоднородностей ТМИ по характеру их проявления [10]. В общей классификации неоднородностей ТМИ можно выделить структурно-временную неоднородность, которая проявляется как нелинейные трансформации вероятностной структуры анализируемых процессов по причине наличия возмущающих воздействий, дестабилизирующих факторов.

Практика обработки ТМИ отечественных и зарубежных ракет космического назначения и межконтинентальных баллистических ракет показывает, что нелинейные преобразования ТМП могут быть обусловлены некорректной настройкой датчико-преобразующей аппаратуры (типичным примером является параметр осевой перегрузки РН «Союз-2» на участке максимальных скоростных напоров), конструктивными особенностями отдельных бортовых систем (например, двигательной установки автономного блока разведения), а также нештатными условиями функционирования при воздействии дестабилизирующих факторов на объект контроля. В перечисленных случаях оценки плотности вероятностей имеют ярко выраженных несимметричных характер.

Проведенный статистический анализ показал, что наиболее близкой для полученных оценок несимметричных плотностей вероятностей ТМИ является модель χ-распределения (модуля n-мерного вектора с независимыми гауссовыми компонентами) с различным числом степеней свободы в зависимости от конкретных условий и причин возникновения нештатных ситуаций. Учитывая, что гауссовские процессы и процессы с χ-распределением относят к процессам первого класса (процессам, которые обладают свойствами статистической независимости значений процесса и его производной в совпадающие моменты времени и гауссовости плотности вероятности производной процесса) [14], модель ТМИ со структурно-временной неоднородностью можно представить в следующим виде

$$p(\xi) \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(\xi),$$

$$p_i(\xi) \big| p_i(\xi, \dot{\xi}, t) = p_i(\xi, t) p_i(\dot{\xi}, t),\ p_i(\dot{\xi}, t) = (2\pi\sigma_{\dot{\xi}}^2)^{-1/2} \exp(\dot{\xi}^2 / 2\sigma_{\dot{\xi}}^2),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1,2,...,n. \quad (1)$$

С использованием представленной модели можно формализовать нелинейные преобразования телеметрируемых процессов (процессов первого класса).

Математическое описание процесса обработки ТМИ со структурно-временной неоднородностью может быть представлено в виде коммутативной диаграммы, изображенной на рис. 1.

Исходные данные:

1. Реализация $\xi_{<n>}$ случайного процесса $\{\xi(t)\}$.

Ограничения:

1. Выборка $\xi_{<n>}$ конечна $n < \infty$.
2. Процесс имеет конечную дисперсию $R_\xi(0) < \infty$.
3. Процесс является двукратно дифференцируемым $R_\xi^{(4)}(0) < \infty$ на интервале обработки.

Найти:

1. Множество $\mathbf{X}_{<l>}$ информативных признаков и функцию $f : \xi_{<n>} \to \mathbf{X}_{<l>}$ измерения.
2. Отображение $h : \mathbf{X} \to \mathrm{J}$, ставящее в соответствие вектору признаков $\mathbf{X}_{<l>}$ решение $k \in \mathrm{J}$ о вероятностном распределении выборки $\xi_{<n>}$ с учетом ошибок при классификации, где $\mathrm{J} = \{1,2,...,m\}$ – индексное множество. Согласно теореме о гомоморфизме множеств должны выполняться условия $h = \psi\alpha$ и $\lambda = \psi\mu$, где:

– $\psi : \mathbf{X} \to \mathrm{Q}$ отображение, ставящее в соответствие вектору признаков $\mathbf{X}_{<l>}$ модель распределения ТМП (класс) $q \in \mathrm{Q}$;

– $\alpha : \mathrm{Q} \to \mathrm{J}$ отображение, ставящее в соответствие модельному распределению его номер;

– $\lambda : \mathbf{X} \to \mathbf{X}/\Sigma$ отображение факторизации (разбиения множества $\mathbf{X}$ на классы эквивалентности)

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_i \mid \mathbf{X}_i \neq \varnothing, \mathbf{X}_1 \cup ... \cup \mathbf{X}_m =$$
$$= \mathbf{X}, \mathbf{X}_i \cap \mathbf{X}_j = \varnothing, i, j \in \mathrm{J}, i \neq j;$$

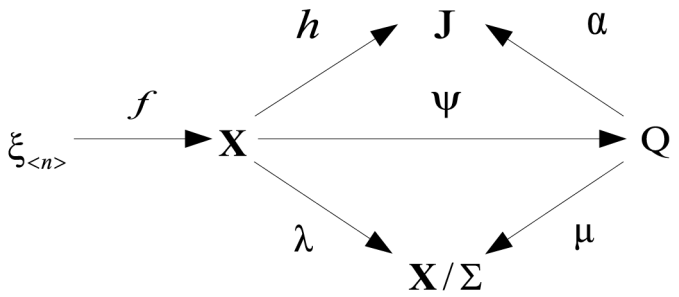


Рис.1. Диаграмма процесса обработки ТМИ

– $\mu : Q \to \mathbf{X}/\Sigma$ взаимно однозначное отображение между фактор-множеством и множеством классов распознавания.

С учетом введенных обозначений получаем

$$\forall k \in J,\ \mathbf{X}_k \in \mathbf{X},\ h(\mathbf{X}_k) = k\,.$$

Таким образом, необходимо решить задачу сатисфакционного выбора отображения h из множества допустимых отображений (статистик) **H**, характеризуемых показателем качества **E**.

$$\mathbf{H}_{Д} \xrightarrow{\mathbf{E}} h\,. \qquad (2)$$

Вектор показателей качества имеет вид [5, 7]:

$$\mathbf{E} = < D, T > . \qquad (3)$$

где

D – показатель достоверности, характеризующий вероятность правильного принятия решения о принадлежности выборки к одному из заданных классов;

T – показатель оперативности, характеризующий быстродействие системы или зависимость времени выполнения программ от объема обрабатываемой ТМИ и ограниченный временем принятия решения о ТС объекта.

Информативные признаки нелинейных преобразований телеметрируемых параметров

Анализ научных работ [2, 3, 8, 9] позволил сделать вывод, что при статистическом оценивании ТМИ на этапе оперативной обработки могут эффективно использоваться характеристики выбросов траекторий случайных процессов или характеристики типа «превышений уровней» [11, 13]. Достоинством алгоритмов, использующих характеристики выбросов, являются простота реализации и низкие вычислительные затраты, что позволяет их применять в системах оперативной обработки ТМИ РН и РБ. Кроме того, статистики выбросов содержат всю информацию о вероятностных характеристиках одномерных распределений случайных процессов.

Среднее число положительных пересечений $N_\xi^+(H,1)$ траекторией заданного уровня для процессов первого класса определяется выражением:

$$N_\xi^+(H,1) = (2\pi)^{-1/2}\sqrt{-R_\xi''(\tau)|_{\tau=0}}\,p(\xi)|_{\xi=H}\,. \qquad (4)$$

С учетом формулы (4) выражение для вычисления среднего числа пересечений траекторией гауссовского процесса заданного уровня имеет вид

$$N_\xi^+(H,1) = (2\pi)^{-1}\sqrt{-r_\xi''(\tau)|_{\tau=0}}\,\exp[-0.5(H/\sigma_\xi)^2],\ H \in (-\infty;\infty)\,, \qquad (5)$$

Получены выражения среднего количества пересечений заданного уровня процесса с χ-распределением, выраженное через дисперсию анализируемого процесса

$$N_\xi^+(H,1) = (2\pi)^{-1/2}\sqrt{-r_\xi''(\tau)|_{\tau=0}}\,(H/\sigma_\xi)^{n-1}\frac{2\left\{n-2\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Big/\Gamma(n/2)\right]^2\right\}^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\times$$
$$\times\exp\left[-(H/\sigma_\xi)^2\left\{0.5n-\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Big/\Gamma(n/2)\right]^2\right\}\right],\ H \ge 0. \qquad (6)$$

Для случайных процессов первого класса с одинаковыми спектрально-корреляционными свойствами, характер изменения числа пересечений относительных уровней однозначно определяется одномерной плотностью вероятностей. С этой целью в работе введена характеристика нормированного среднего количества пересечений, не зависящая от спектральных свойств процессов. Аналитические выражения для ее вычисления имеют вид:

$$L_\xi^+(h,1) = (1/\lambda_2)N_\xi^+(h,1) = (2\pi)^{-1/2}\,p(\xi)|_{\xi=h} \qquad (7)$$

где λ_2 – спектральный момент.

Характеристика нормированного среднего количества пересечений $L_\xi^+(h,1)$ уровня $h = \sigma_\xi^{-1}H$ реализацией $\xi(t)$ процесса определяется

1) процесс Гаусса

$$L_\xi^+(h,1) = (1/\lambda_2)N_\xi^+(h,1) = (2\pi)^{-1/2}\,p(\xi)|_{\xi=h}\,. \qquad (8)$$

2) χ-процесс

$$L_\xi(h,1) = (2\pi)^{-1/2}h^{n-1}\frac{2\gamma(n)^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\exp\left[-0.5h^2\gamma(n)\right],\ H \ge 0\,, \qquad (9)$$

где $\gamma(n) = n - 2\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Big/\Gamma(n/2)\right]^2$.

Относительная длительность $T^+(H)$ пребывания процессом над заданным уровнем H определяется выражением

$$T^+(H) = 1 - F_\xi(H)\,. \qquad (10)$$

Поскольку в результате обработки получаются не истинные значения, а оценки, на основании которых делаются заключения об истинных значениях параметров анализируемых процессов, необходимо знать статистические характеристики выбросов для оценивания точности измерений.

Оценка среднего количества пересечений реализацией эргодического процесса

$$\hat{N}_\xi(H,1) = \frac{1}{T}n(H,T)\,. \qquad (11)$$

является асимптотически нормальной и несмещенной $M[\hat{N}_\xi(H,1)] = N_\xi(H,1)$.

Для стационарного гауссовского процесса ранее были получены приближенные с точностью до T^{-1} асимптотические результаты [11]

$$D[\hat{N}_\xi(h,\ 1)_T] = \frac{-r''(0)}{\pi^2 (T/2\tau_K)}(1+h^2)^2 \exp(-h^2),\ T >> \tau_K, \quad (12)$$

где $h = \sigma_\xi^{-1}(H - m_\xi)$ – относительный уровень.

Для нахождения дисперсии среднего числа пересечений заданного уровня χ-процесса используется алгоритм моделирования, который состоит в генерации нормально распределенной случайной последовательности, пропускания ее через формирующий фильтр для обеспечения необходимых спектральных свойств, нормализации и применения нелинейного преобразования специального вида. Оценка дисперсии $\hat{\sigma}_N^2(H,T)$ рассчитывается экспериментально по формуле

$$\hat{\sigma}_N^2(H,T) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}[n^{(i)}(H,T) - N(H,T)]^2 . \quad (13)$$

Оценка среднего значения относительной длительности $T^+(H)$ пребывания траектории $\xi(t)$ процесса над заданным уровнем определяется выражением

$$\hat{T}^+(H) = T^{-1}\int_0^T x(t;H)dt , \quad (14)$$

где $x(t;H) = I\{\xi(t) > H\} = \begin{cases} 1, \xi(t) > H; \\ 0, \xi(t) \le H \end{cases}$ – индикаторная функция.

Оценка $\hat{T}^+(H)$ является асимптотически нормальной и несмещенной $M[\hat{T}^+(H)] = T^+(H)$, а дисперсия оценки имеет вид [11]

$$D[\hat{T}^+(H)] \approx (T/2\tau_K)^{-1} F_\xi(H)[1 - F_\xi(H)],\ T >> \tau_K . \quad (15)$$

Критерий разделимости и признаковое пространство для классификации процессов первого класса

Критерий разделимости для процессов первого класса предлагается записать в следующем виде:

$$r(\omega_i, \omega_j, x_1, ..., x_l) = r(\omega_i, \omega_j : \mathbf{X}_{<l>}), \quad (16)$$

где l случайных величин (среднего количества пересечений или среднего значения относительной длительности) используются в качестве информативных признаков. Выражение для вычисления критерия имеет вид:

$$r(\omega_i, \omega_j, x_k) = \begin{cases} k_N(h_k), \text{если } k_N(h_k) \ge 1 \\ 1/k_N(h_k) \text{ если } k_N(h_k) < 1 \end{cases}, \quad (17)$$

где $k_N(h_k)$ – отношение значения числа выбросов процесса с χ-распределением к числу выбросов гауссовского процесса на относительном уровне $h_k = 1,2,...$

В соответствии с выражением (17) лучшей разделимости классов соответствует большее значение критерия. Критерий удовлетворяет следующим условиям:

1. Монотонная связь с вероятностью ошибки.
2. Инвариантность относительно линейных преобразований.
3. Аддитивность по отношению к признакам:

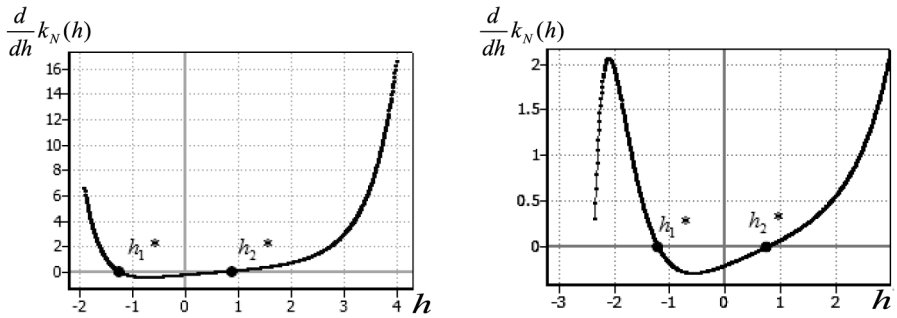
$$r(\omega_i, \omega_j : \mathbf{X}_{<l>}) = \sum_{k=1}^{l} r(\omega_i, \omega_j : x_k), \quad (18)$$

4. Метрические свойства:

1) $r(\omega_i, \omega_j : \mathbf{X}_{<l>}) > 1$ при $i \ne j$,
2) $r(\omega_i, \omega_i : \mathbf{X}_{<l>}) = 1$,
3) $r(\omega_i, \omega_j : \mathbf{X}_{<l>}) = r(\omega_j, \omega_i : \mathbf{X}_{<l>})$,
4) $r(\omega_i, \omega_i : \mathbf{X}_{<l>}) \le r(\omega_i, \omega_i : \mathbf{X}_{<l+1>})$.

Если в качестве информативного признака принять среднее количество положительных пересечений реализацией процесса заданного уровня, то отношение $k_N(h)$ среднего количества пересечений уровней реализацией процесса с χ-распределением к среднему количеству пересечений реализацией гауссовского процесса на одинаковых относительных уровнях h имеет вид

$$k_N(h) = (2\pi)^{1/2}(h+c)^{n-1}\frac{2\gamma(n)^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\exp\Big[0{,}5(h+c)^2[1 - \gamma(n)] - (h+c)c + 0{,}5c^2\Big],\quad h \in [-c, \infty). \quad (19)$$



а) б)

Рис. 2. Производная $\frac{d}{dh}k_N(h)$ переходной характеристики для процесса с χ-распределением с n=2 (а); с χ-распределением с n=3 (б)

где $\gamma(n) = n - 2\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Big/\Gamma(n/2)\right]^2$, c – значение нулевого уровня (числовая характеристика центра группирования).

Продифференцируем функцию $k_N(h)$, получим в точках равенства нулю производной $d\,k_N(h)/dh$ функции значения относительных уровней h^*, при которых характеристика $k_N(h)$ принимает экстремальные значения. В частности, характеристика $d\,k_N(h)/dh$ для χ-процесса с числом степеней свободы $n=2$ определяется (рисунок 2, а)

$$\frac{d}{dh}k_N(h) = (4-\pi)\sqrt{\pi/2}\,\exp\left[-(h+c)^2(0{,}5-\pi/4) - \right.$$
$$\left. -(h+c)c + 0{,}5c^2\right] \times \left[(h+c)^2(\pi/2-1) - (h+c)c + 1\right], h \in [-c, \infty),$$
$$\text{где } c = \sqrt{\pi/(4-\pi)}; \tag{20}$$

для χ-процесса с $n=3$ определяется (рисунок 2, б)

$$\frac{d}{dh}k_N(h) = 2(h+c)(3-8/\pi)^{3/2}\exp\left[(h+c)^2(4/\pi-1) - \right.$$
$$\left. -(h+c)c + 0{,}5c^2\right] \times \left[2(h+c)^2(4/\pi-1) - (h+c)c + 2\right], h \in [-c, \infty),$$
$$\text{где } c = 2\sqrt{2/(3\pi-8)}. \tag{21}$$

В выражениях (20), (21) за нулевой уровень c принято математическое ожидание.

Полученные уровни h^* позволяют сформировать признаковое пространство (признаками в данном случае выступают значения среднего количества пересечений на относительных уровнях $h_i^* \mid i = 1, 2$), в котором случайные процессы с рассматриваемыми законами распределений являются максимально различимыми.

Результаты контроля числа пересечений реализацией $\xi(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ телеметрируемого процесса уровней h^* с заданной степенью уверенности позволяют сделать вывод о законе распределения ТМП, причем достоверность принятия решения зависит от количества уровней, подлежащих контролю, длительности контроля, самих значений относительных уровней.

В работе [9] в систематизированном виде представлены значения уровней при разных характеристиках и предположениях о центре распределения.

Статистический критерий для классификации процессов первого класса и оценивание вероятностей ошибочных решений

Анализ методов классификации показал, что наиболее пригодными для решения задачи обнаружения нелинейных преобразований ТМП является критерий Неймана-Пирсона. Критерий Неймана-Пирсона применяется в случаях, когда остаются неизвестными априорные вероятности принадлежности объектов классам $P(\omega_i), i = 1{,}2$ и матрица рисков $c = \{c_{ij} : i, j = \overline{1, n}\}$. В этом случае фиксируется некоторая малая положительная величина α, которая называется уровнем значимости. В задаче проверки гипотез для двух классов (объектов распознавания) можно совершить два типа ошибок: одни появляются как результат неправильной классификации объектов первого класса , а другие возникают из-за неправильной классификации объектов класса.

Критерий Неймана-Пирсона состоит в построении стратегии, то есть такого разбиения признакового пространства R на непересекающиеся области [1]

$$R_1, R_2 : R_1 \cap R_2 = \varnothing, R_1 \cup R_2 = R \tag{22}$$

чтобы, во-первых, условная вероятность ошибки первого рода ε_1 (вероятности отнесения X к классу ω_2, когда на самом деле X принадлежит классу ω_1) не превышала заранее заданного значения α

$$\varepsilon_1 = \int_{R_2} p(\mathbf{X}/\omega_1)d\mathbf{X} \le \alpha \tag{23}$$

во-вторых, минимизировалась вероятность ошибки второго рода (вероятность отнесения X к классу ω_1, когда на самом деле X принадлежит классу ω_2)

$$\varepsilon_2 = \int_{R_1} p(\mathbf{X}/\omega_2)d\mathbf{X} \to \min \quad ,$$
$$R_1 \cap R_2 = \varnothing, R_1 \cup R_2 = R \quad . \tag{24}$$

где $p(\mathbf{X}/\omega_i) = p_i(\mathbf{X}), i = 1{,}2$ – условные плотности вероятности распределения признаков в классах.

Вычисление вероятности ошибочного решения сводится к интегрированию плотности распределения $p(\mathbf{X}/\omega_i), i = 1{,}2$ в n-мерном пространстве по выражениям (20), (21). В данном случае удобнее интегрировать плотность вероятности отношения правдоподобия $p(l/\omega_i), i = 1{,}2$, которая является одномерной. Интегралы в этом случае имеют вид:

$$\varepsilon_1 = \int_0^{P(\omega_2)/P(\omega_1)} p(l/\omega_1)dl; \tag{25}$$

$$\varepsilon_2 = \int_{P(\omega_2)/P(\omega_1)}^{\infty} p(l/\omega_2)dl. \tag{26}$$

Отношением правдоподобия называется величина

$$l(X) = \frac{p(\mathbf{X}/\omega_1)}{p(\mathbf{X}/\omega_2)}. \tag{27}$$

Нижний предел интегрирования в (25) равен 0, потому что отношение правдоподобия всегда положительно.

Для определения решающего правила Неймана-Пирсона необходимо найти минимум выражения

$$r = \varepsilon_2 + \mu(\varepsilon_1 - \alpha), \tag{28}$$

где μ – множитель Лагранжа. Подставляя (23) и (24) в (28), получаем:

$$r = \int_{R_1} p(\mathbf{X}/\omega_2)d\mathbf{X} + \mu\left(\int_{R_2} p(\mathbf{X}/\omega_1)d\mathbf{X} - \alpha\right) = (1-\mu\alpha) + \int_{R_2}[\mu p(\mathbf{X}/\omega_1) - p(\mathbf{X}/\omega_2)]d\mathbf{X}. \tag{29}$$

Риск r можно минимизировать путем выбора областей R_1, R_2 следующим образом:

$$\frac{p(\mathbf{X}/\omega_1)}{p(\mathbf{X}/\omega_2)} < \mu \text{ при } X \in R_1, \frac{p(\mathbf{X}/\omega_1)}{p(\mathbf{X}/\omega_2)} > \mu \text{ при } \mathbf{X} \in R_2. \tag{30}$$

При заданной вероятности ошибки α порог μ есть решение уравнения

$$\varepsilon_1 = \int_{R_2} p(\mathbf{X}/\omega_1)d\mathbf{X} = \alpha. \tag{31}$$

Если использовать плотность вероятности отношения правдоподобия, то выражение для вычисления порога μ имеет вид:

$$\varepsilon_1 = \int_0^{\mu} p(l/\omega_1)dl = \alpha. \tag{32}$$

Вероятность ошибки является монотонной функцией относительно ε_1 поэтому после вычисления значений ε_1 для нескольких μ можно найти такое μ, которому соответствует значение $\varepsilon_1 = \alpha$.

Если распределения $p(\mathbf{X}/\omega_i), i = 1, 2$ являются нормальными с векторами м.о. $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ и ковариационными матрицами $\mathbf{\Sigma}_1, \mathbf{\Sigma}_2$, то вероятности ошибки ε_1 и ε_2 можно вычислить по следующему алгоритму [12]:

1. Для одновременной диагонализации ковариационных матриц $\mathbf{\Sigma}_1, \mathbf{\Sigma}_2$ для классов ω_1 и ω_2 применить линейное преобразование:

$$\mathbf{A\Sigma}_1\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \text{ И } \mathbf{A\Sigma}_2\mathbf{A}^T = \mathbf{\Lambda}, \tag{33}$$

где $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{A}^T$ матрицы собственных значений и собственных векторов матрицы $\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{\Sigma}_2$.

2. В случае независимости компонент вектора $\mathbf{X}$ (в нашем случае это условие выполняется, так как мы провели диагонализацию и компоненты вектора $\mathbf{X}$ независимы) $p(\mathbf{X}/\omega_i)$ можно выразить как произведение отдельных координат:

$$p(\mathbf{X}/\omega_i) = \prod_{k=1}^{n} p(x_k/\omega_i), \tag{34}$$

Поэтому величина $h(\mathbf{X}) = -\ln l(\mathbf{X}) = -\ln p(\mathbf{X}/\omega_1) + \ln p(\mathbf{X}/\omega_2)$ будет равна

$$h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} h(x_k), \tag{35}$$

где

$$h(x_k) = -\ln\frac{p(x_k/\omega_1)}{p(x_k/\omega_2)}, k = \overline{1,n}. \tag{36}$$

В нашем случае $n = 2$.

Если выполняется условие (35), то характеристическая функция $\varphi_i(\omega)$ решающего правила $h(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \omega_i$ равна произведению характеристических функций $\varphi_{ik}(\omega)$ решающих правил $h(x_k), x_k \in \omega_i$:

$$\varphi_i(\omega) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{ik}(\omega), \tag{37}$$

где

$$\varphi_{ik}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp[j\omega h(x_k)]p(x_k/\omega_i)dx_k. \tag{38}$$

Для классов ω_1 и ω_2 вычислить характеристические функции решающего правила $h(x_k) = -\ln\frac{p(x_k/\omega_1)}{p(x_k/\omega_2)}, k = 1,2$ по следующим выражениям:

$$\varphi_{1k}(\omega) = \frac{1}{(1-j\omega a_{1k})^{0.5}}\exp\left[\frac{-b_{1k}^2\omega^2}{2(1-j\omega a_{1k})} - \frac{j\omega}{2}h_{1k}\right], \tag{39}$$

где

$$a_{1k} = 1 - \frac{1}{\lambda_k},$$

$$b_{1k} = \frac{1}{\lambda_k}(d_{2k} - d_{1k}),$$

$$h_{1k} = \frac{\upsilon_{1k}}{(1-a_{1k})} + \ln\lambda_k,$$

d_{ik} – элемент вектора математического ожидания $D_i, i = 1,2$ в преобразованной системе координат,

λ_k – элемент матрицы собственных значений матрицы $\Sigma_1^{-1}\Sigma_2$.

$$\varphi_{2k}(\omega) = \frac{1}{(1-j\omega a_{2k})^{0.5}}\exp\left[\frac{-b_{2k}^2\omega^2}{2(1-j\omega a_{2k})} - \frac{j\omega}{2}h_{2k}\right], \tag{40}$$

где

$$a_{2k} = \lambda_k - 1,$$

$$b_{2k} = (\lambda_k)^{0.5}(d_{2k} - d_{1k}),$$

$$h_{2k} = \frac{-b_{2k}^2}{(1+a_{2k})} + \ln\lambda_k.$$

Плотность вероятности $h(X)$ равна обратному преобразованию Фурье:

$$p(h/\omega_i) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(\omega)\exp(-j\omega h)d\omega. \tag{41}$$

3. Вычислить вероятности ошибки по формулам:

$$\varepsilon_1 = \int_t^{\infty} p(h/\omega_1)dh; \quad (42)$$

$$\varepsilon_2 = \int_{-\infty}^{t} p(h/\omega_2)dh, \quad (43)$$

где $t = \ln\frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)}$.

Решающее правило $h(\mathbf{X})$ имеет вид [1]

$$h(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{M}_1)^T \mathbf{\Sigma}_1^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{M}_1) - \frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{M}_2)^T \mathbf{\Sigma}_2^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{M}_2) + \frac{1}{2}\ln\frac{|\mathbf{\Sigma}_1|}{|\mathbf{\Sigma}_2|} - t < 0 \to \mathbf{X} \in \omega_1;$$

$$h(\mathbf{X}) - t > 0 \to \mathbf{X} \in \omega_2. \quad (44)$$

Подставляя полученные значения t в выражение (44), можно найти решающее правило для классификации процессов первого класса по статистикам превышений уровней с заданной вероятностью ошибки.

Заключение

В работе предлагается математическое описание способа оценивания нелинейных преобразований ТМП с использованием теоретико-множественного подхода. Разработана модель ТМИ со структурно-временной неоднородностью. Определены информативные признаки нелинейных преобразований ТМП. Для процессов первого класса разработан критерий разделимости на основе отношений характеристик типа «превышений уровней». Сформировано признаковое пространство, образованное статистиками превышений уровней, в котором процессы с заданными законами распределения являются максимально разделимыми. Представлены аналитические выражения для формирования решающих правил и оценивания вероятностей ошибочных решений.

Полученные результаты предлагается использовать для идентификации изменений в анализируемых процессах, которые могут быть вызваны нештатными (в том числе и аварийными) ситуациями, что даст возможность прогнозировать ТС контролируемого объекта и обеспечить своевременное и обоснованное принятие решение на управление.

Литература

1. Горелик, А. Л. Методы распознавания / А.Л. Горелик, В.А. Скрипкин – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1984. – 208 с.

2. Каргин, В. А. Обнаружение и отбраковка аномальных результатов измерений для формирования исходной измерительной информации по ракете-носителю типа «Союз» / В.А. Каргин, Д.А. Николаев, Е.Б. Самойлов // Информация и Космос. – 2008. –№ 4. – С. 83–86.

3. Каргин, В. А. Оперативное необратимое сжатие телеметрической информации / В.А. Каргин // Труды СПИИРАН. – 2013. – Вып. 6 (29). – С. 58–68.

4. Теория и практика построения автоматизированных систем мониторинга технического состояния космических средств: монография / О.В. Майданович [и др.] ; под ред. О.В. Майдановича – СПб.: ВКА имени А.Ф. Можайского, 2011. – 219 с.

5. Надежность и эффективность в технике: Справочник: в 10 т. – М.: Машиностроение, 1988. – Т. 3: Эффективность технических систем – 328 с.

6. Комплексная автоматизация мониторинга состояния космических средств на основе интеллектуальных информационных технологий / М.Ю. Охтилев [и др.] // Информационные технологии. – 2011. – № 10. – С. 14–20.

7. Петухов, Г. Б. Методологические основы внешнего проектирования целенаправленных процессов и целеустремленных систем / Г.Б. Петухов, Г.Б. Якунин. – М.: АСТ, 2006. – 504 с.

8. Каргин, В. А. Оценивание вероятностных характеристик телеметрируемых процессов ракет-носителей в реальном масштабе времени / В.А. Каргин, Д.А. Николаев, Я.А. Скороходов // Труды ВКА имени А. Ф. Можайского. – 2014. – Вып. 644. – С. 161–168.

9. Каргин, В. А. Оценивание нелинейных зависимостей при оперативной обработке телеметрической информации по статистике пересечений заданных уровней / В.А. Каргин, Я.А. Скороходов // Труды ВКА. – 2015. – Вып. 646. – С. 13–23.

10. Каргин, В. А. Подход к классификации неоднородностей телеметрической информации ракет-носителей / В.А. Каргин, Я.А. Скороходов // Авиакосмическое приборостроение. – 2015. – № 4. – С. 94–103.

11. Тихонов, В. И. Выбросы траекторий случайных процессов / В.И. Тихонов, В.И. Хименко. – М.: Наука, 1987. – 305 с.

12. Фукунага, К. Введение в статистическую теорию распознавания образов : [пер. с англ.] / К. Фукунага. – М.: Наука, 1979. – 368 с.

13. Хименко, В. И. Характеристики типа «превышений уровней» для случайных точечных процессов / В.И. Хименко // Радиотехника и электроника. – 2000. – № 4. – С. 436–443.

14. Хименко, В. И. О среднем числе выбросов траектории негауссова случайного процесса над заданным уровнем / В.И. Хименко // Изв. высших учебных заведений. – 1978. – Т. 21. – № 8. – С. 1170–1176.